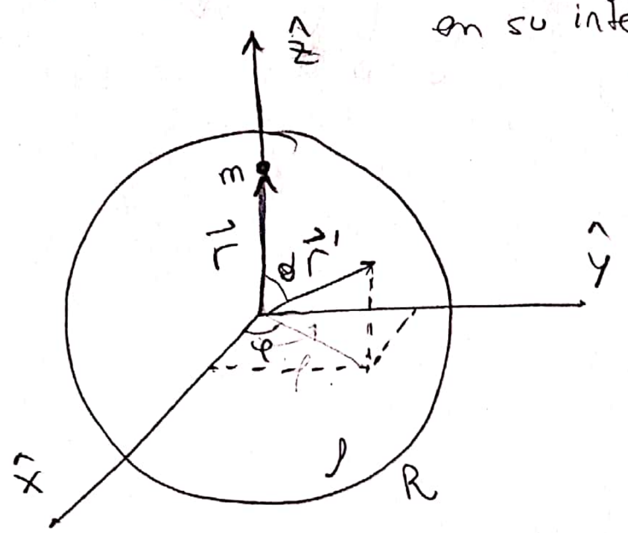
Problema 14



Fuerza gravitatoria de un planeta a una masa a en su interior:

$$\vec{F}_{mp} = -G_N m \rho \int \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\, dV'$$

Uso coord. esféricas.

$$\vec{r} = r\hat{z}$$

$$\vec{r}' = r'\underbrace{\left(\operatorname{sen}\theta'\cos\varphi'\,\hat{x} + \operatorname{sen}\theta'\operatorname{sen}\varphi'\,\hat{y} + \cos\theta'\,\hat{z}\right)}_{\hat{r}'}$$

$$dV' = r'^2 \operatorname{sen}\theta'\, dr'\, d\theta'\, d\varphi'$$

$$\vec{F}_{mp} = -m\rho G_N \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \frac{\left(-r'\operatorname{sen}\theta'\cos\varphi'\,\hat{x} - r'\operatorname{sen}\theta'\operatorname{sen}\varphi'\,\hat{y} + (r - r'\cos\theta')\hat{z}\right)}{\left(r'^2\operatorname{sen}^2\theta' + r^2 + r'^2\cos^2\theta' - 2rr'\cos\theta'\right)^{3/2}} \times r'^2 \operatorname{sen}\theta'\, dr'\, d\theta'\, d\varphi'$$

$$= -m\rho G_N \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \frac{\left[(r - r'\cos\theta')\hat{z} - \cancel{r'\operatorname{sen}\theta'\cos\varphi'\,\hat{x}} - \cancel{r'\operatorname{sen}\theta'\operatorname{sen}\varphi'\,\hat{y}}\right]}{\left(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta'\right)^{3/2}} \times r'^2 \operatorname{sen}\theta'\, dr'\, d\theta'\, d\varphi'$$

integral en φ' se anula

$$= -m\rho G_N \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \frac{(r - r'\cos\theta')\, r'^2 \operatorname{sen}\theta'\, dr'\, d\theta'\, d\varphi'}{\left(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta'\right)^{3/2}}\,\hat{z}$$

$$= -2\pi m\rho G_N \int_0^{\pi}\int_0^{R} \frac{(r - r'\cos\theta')\, r'^2 \operatorname{sen}\theta'}{\left(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta'\right)^{3/2}}\, dr'\, d\theta'\,\hat{z}$$

$$u = \cos\theta'$$

$$du = -\operatorname{sen}\theta' \, d\theta'$$

$$\Rightarrow \; = 2\pi m \rho G_N \int_1^{-1} \int_0^R \frac{(r - r'u)\, r'^2 \; dr' \, du}{(r^2 + r'^2 - 2rr'u)^{3/2}} \, \hat{z}$$

$$= 2\pi m \rho G_N \int_0^R dr' \left(\frac{r'^2 (ru - r')}{r^2 \sqrt{r'^2 - 2r'ru + r^2}} \right)_1^{-1} \hat{z}$$

$$= 2\pi m \rho G_N \int_0^R dr' \left[\frac{- r'^2 \cancel{(r + r')}}{r^2 \cancel{\sqrt{r'^2 + 2rr' + r^2}}} - \frac{r'^2 (r - r')}{r^2 \sqrt{r'^2 - 2rr' + r^2}} \right] \hat{z}$$

$$= 2\pi m \rho G_N \hat{z} \int_0^R dr' \left[-\frac{r'^2}{r^2} - \frac{r'^2}{r^2} \left(\frac{r - r'}{|r - r'|} \right) \right]$$

$$= 2\pi m \rho G_N \hat{z} \left[\int_0^r dr' \left(-\frac{r'^2}{r^2} - \frac{r'^2}{r^2} \right) + \int_r^R dr' \cdot 0 \right]$$

$$= \frac{-4\pi m \rho G_N \hat{z}}{r^2} \, \frac{r^3}{3} \hat{z} = \boxed{ - \frac{\left(\frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho \right) \cdot m \cdot G}{r^2} \, \hat{z} = \vec{F}_{mP} }$$

⇒ Cuando una masa m se encuentra en el "interior" de un planeta de densidad ρ uniforme,

la fuerza que el planeta ejerce sobre la masa es:

$$\boxed{\vec{F}_{mP} = - \frac{\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho\right) \cdot m \cdot G}{r^2} \hat{r}}$$

(Antes puse a la masa en el eje $\hat{z}$, pero como tengo simetría esférica puedo ubicarla donde quiera).

⊙ $\frac{4}{3}\pi r^3$ es el volumen de una esfera de radio r.

⊙ $\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho$ es la masa de dicha esfera

⇒ La masa m siente la fuerza que le hace la esfera "interior" del planeta y no percibe el efecto de la cascara exterior: