RADIACIÓN

CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS DE CARGAS EN MOVIMIENTO Y DISTRIBUCIONES VARIABLES

¿A QUÉ LLAMAMOS RADIACIÓN?

Ya sabemos que las ecuaciones de Maxwell son dependientes del tiempo y admiten, por ejemplo, soluciones de ondas que se propagan en el vacío (para las ecuaciones sin fuentes).

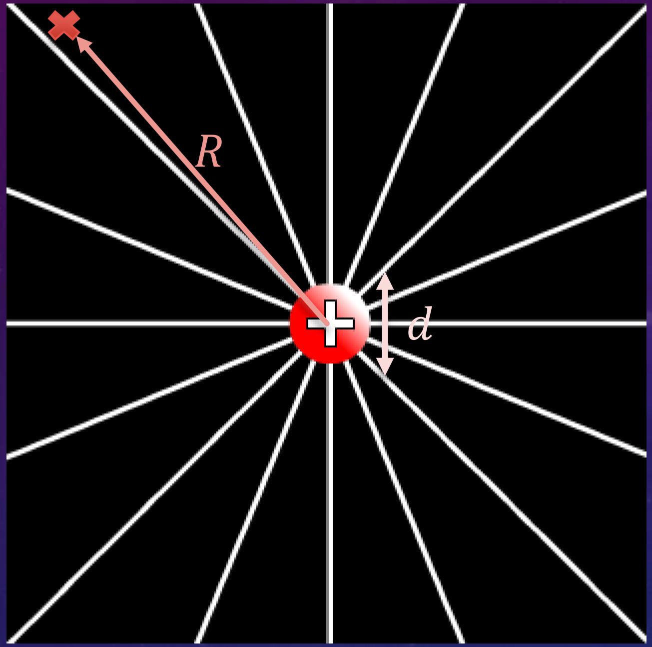
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho(t)}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}(t) \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Al introducir fuentes, estas también pueden depender del tiempo. Esto da mayor riqueza a las soluciones.

Se llaman *campos de radiación* los campos producidos por estas fluctuaciones locales de carga y corriente **que se ven *muy lejos* de las fuentes**.

$$R \gg d$$



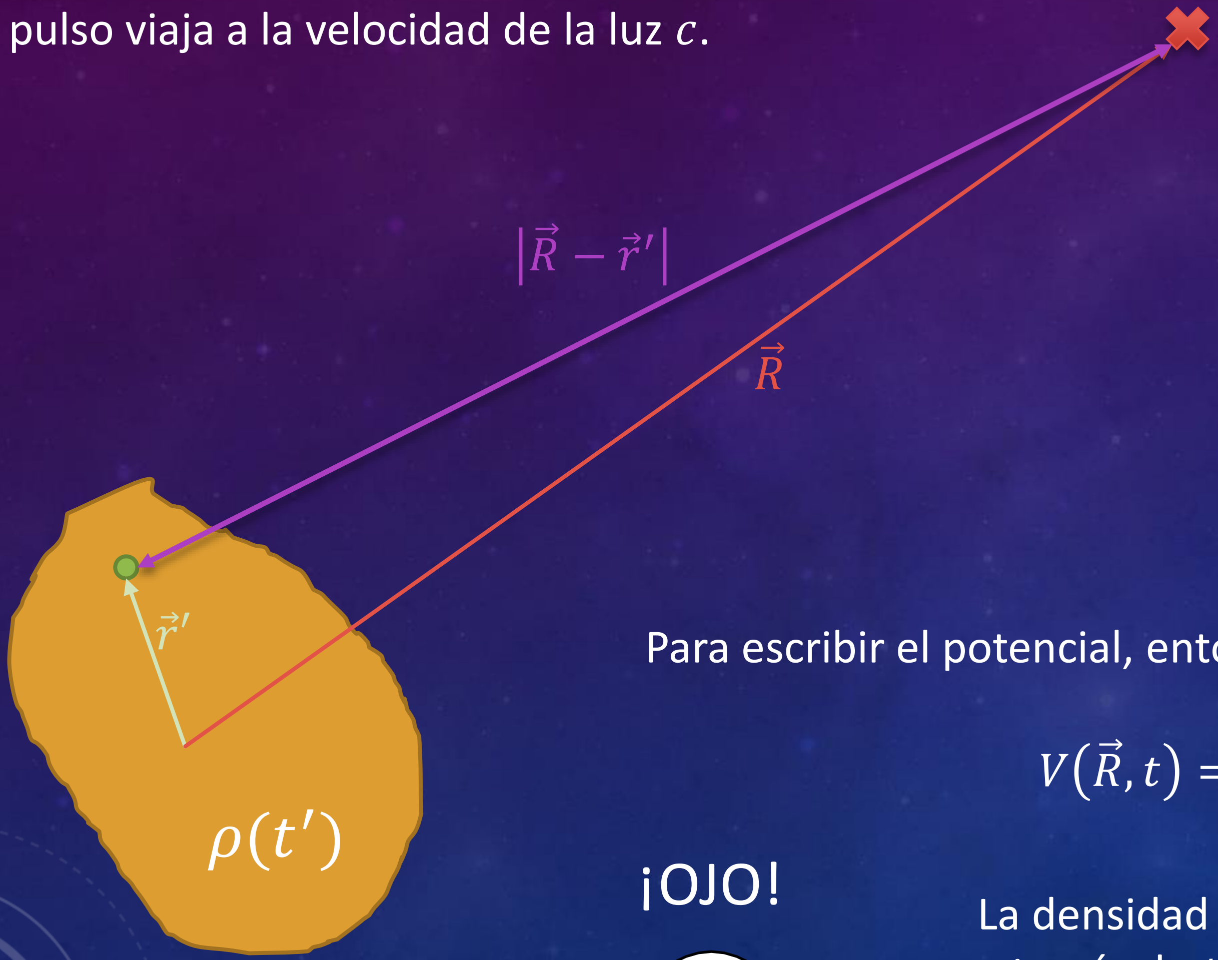
$$R \gg d$$

d es el tamaño característico de las fuentes
R es la distancia a la que estamos mirando (punto campo)

Podríamos pensar en cualquier fuente variable localizada en el espacio.

¿Cuál es el campo producido por estas fuentes variables?

Supongamos alguna distribución variable $\rho(\vec{r}', t')$. ¿Qué potencial vemos en un punto del espacio $\vec{R}$?
En particular, ¿qué vemos por culpa de lo que pasa en un determinado punto fuente $\vec{r}'$?
La transmisión de esta información no es instantánea – hay un *retardo.*
El pulso viaja a la velocidad de la luz c.



Si esta señal nos llegó en un tiempo t

¿En qué tiempo se emitió?

Al tiempo actual hay que restarle el tiempo que tardó la onda en llegar:

$$t_{ret} = t - \frac{|\vec{R} - \vec{r}'|}{c}$$

Llamamos a este el *tiempo retardado*.

Para escribir el potencial, entonces, hay que tener en cuenta este retardo.

$$V(\vec{R}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t_{ret})}{|\vec{R} - \vec{r}'|} dV'$$

¡OJO!

La densidad ρ también depende de $\vec{r}'$ a través de t_{ret}

En electrostática

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{R} - \vec{r}'|} dV'$$

PROBLEMA 13

Problema 13:
Comprobar que la condición para que se pueda despreciar el tiempo $\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{n}}/c$ en los potenciales retardados (lo cual permite llegar a las expresiones para la radiación dipolar de un sistema) puede escribirse

$$a \ll \lambda,$$

donde a es el orden de las dimensiones del sistema y λ es una longitud de onda característica de la radiación emitida.

Recordemos los potenciales retardados.

$$V(\vec{R},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,',t_{ret})}{|\vec{R}-\vec{r}\,'|}dV' \qquad \vec{A}(\vec{R},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t_{ret})}{|\vec{R}-\vec{r}\,'|}dV'$$

Nos dicen que la radiación emitida tiene una *longitud de onda característica* λ.

Esto quiere decir que tiene también alguna *frecuencia característica* f – recordemos que en vacío $\lambda f = c$.

Esta frecuencia debe venir de una frecuencia de oscilación de las fuentes. Asumamos la situación más simple,

$$\rho(\vec{r}\,',t') = \rho(\vec{r}\,')\cos(2\pi f t' + \phi_0) \qquad \vec{j}(\vec{r}\,',t') = \vec{j}(\vec{r}\,')\cos(2\pi f t' + \phi_0)$$

PROBLEMA 13

$$\rho(\vec{r}\,',t') = \rho(\vec{r}\,')\cos(2\pi f t' + \phi_0)$$

Tiempo retardado

$$t_{ret} = t - \frac{\left|\vec{R} - \vec{r}\,'\right|}{c}$$

Evaluando en el tiempo retardado la densidad de carga (con la corriente es análogo),

$$\rho(\vec{r}\,',t_{ret}) = \rho(\vec{r}\,')\cos\left(2\pi f t - 2\pi f\frac{\left|\vec{R} - \vec{r}\,'\right|}{c} + \phi_0\right)$$

Como estamos mirando radiación, nos paramos *muy lejos*. Es decir, asumimos que $R \gg d > r'$ (d es, por definición, una cota superior de r'). Entonces,

$$\left|\vec{R} - \vec{r}\,'\right| \simeq R - \vec{r}\,'\cdot\hat{R}$$

En breve haremos un paréntesis para mostrar esta fórmula. Introduciendo esto en la expresión de la densidad,

$$\rho(\vec{r}\,',t_{ret}) = \rho(\vec{r}\,')\cos\left(2\pi f t - 2\pi f\frac{R}{c} + 2\pi f\frac{\vec{r}\,'\cdot\hat{R}}{c} + \phi_0\right)$$

Acá nos apareció el tiempo del que nos hablaba el enunciado: $\frac{\vec{r}\,'\cdot\hat{R}}{c}$.

PROBLEMA 13

Problema 13:
Comprobar que la condición para que se pueda despreciar el tiempo $\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{n}}/c$ en los potenciales retardados (lo cual permite llegar a las expresiones para la radiación dipolar de un sistema) puede escribirse

$$a \ll \lambda,$$

donde a es el orden de las dimensiones del sistema y λ es una longitud de onda característica de la radiación emitida.

$$\rho(\vec{r}', t_{ret}) = \rho(\vec{r}') \cos\left(2\pi f t - 2\pi f \frac{R}{c} + 2\pi f \frac{\vec{r}' \cdot \hat{R}}{c} + \phi_0\right)$$

Fíjense que nos sacamos de encima la dependencia “complicada” con $\vec{r}'$ que había antes.

Podemos escribir en términos de la longitud de onda usando $\lambda f = c$.

$$\rho(\vec{r}', t_{ret}) = \rho(\vec{r}') \cos\left(\frac{2\pi c t}{\lambda} - 2\pi \frac{R}{\lambda} + 2\pi \frac{\vec{r}' \cdot \hat{R}}{\lambda} + \phi_0\right)$$

En el problema nos preguntan qué condición hay que pedir para que la contribución de ese término pueda despreciarse.

Pero el término está dentro de un coseno – es una fase. Basta con pedir que sea mucho más pequeño que 2π.

$$2\pi \frac{\vec{r}' \cdot \hat{R}}{\lambda} \ll 2\pi \longrightarrow \vec{r}' \cdot \hat{R} \ll \lambda \xrightarrow{\text{Cota superior}} d \ll \lambda$$

CAMPOS DE UNA CARGA EN MOVIMIENTO

POTENCIALES DE LIÉNARD-WIECHERT

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left|\vec{R} - \vec{r}_q(t_{ret})\right| \left(1 - \frac{\vec{v}(t_{ret})}{c} \cdot \hat{R}\right)}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v}}{\left|\vec{R} - \vec{r}_q(t_{ret})\right| \left(1 - \frac{\vec{v}(t_{ret})}{c} \cdot \hat{R}\right)}$$

Noten tres cosas:

1. El potencial está *retardado* respecto del movimiento de la carga
2. En el caso de movimiento circular hay “olas” de potencial que se propagan hacia afuera, pero en el MRU no.
3. Hay mayor *gradiente* de potencial (campo) en la dirección de movimiento de la carga.

CAMPOS DE UNA CARGA EN MOVIMIENTO

POTENCIALES DE LIÉNARD-WIECHERT

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\vec{R} - \vec{r}_q(t_{ret})|\left(1 - \frac{\vec{v}(t_{ret})}{c}\cdot\hat{R}\right)}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}}{|\vec{R} - \vec{r}_q(t_{ret})|\left(1 - \frac{\vec{v}(t_{ret})}{c}\cdot\hat{R}\right)}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

Cae como R^{-2} (más rápido!)

Cae como R^{-1}

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R\left[\boxed{\cancel{(c^2 - v^2)(c\hat{R} - \vec{v})}} + \boxed{\vec{R}\times\left((c\hat{R} - \vec{v})\times\dot{\vec{v}}\right)}\right]}{\left[\vec{R}\cdot(c\hat{R} - \vec{v})\right]^3}$$

$$\vec{B} = \frac{\hat{R}}{c}\times\vec{E}$$

Podemos despreciar a grandes distancias el término que cae como R^{-2}, nos quedamos sólo con el *término de radiación*.

$$\vec{E}_{rad} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R\left[\vec{R}\times\left((c\hat{R} - \vec{v})\times\boxed{\dot{\vec{v}}}\right)\right]}{\left[\vec{R}\cdot(c\hat{R} - \vec{v})\right]^3}$$

Fíjense que **la carga debe estar acelerada para que haya radiación.**

PROBLEMA 14

Problema 14:
Comprobar que para un sistema aislado de partículas no relativistas con la misma relación carga/masa la radiación es nula.

$$\vec{E}_{rad} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R\left[\vec{R}\times\left(\left(c\hat{R}-\vec{v}\right)\times\dot{\vec{v}}\right)\right]}{\left[\vec{R}\cdot\left(c\hat{R}-\vec{v}\right)\right]^3}$$

Que la partícula sea no relativista es decir que $v \ll c$, a tal punto que se puede despreciar.

$$\vec{E}_{rad} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R\left[\vec{R}\times\left(c\hat{R}\times\dot{\vec{v}}\right)\right]}{\left[\vec{R}\cdot\left(c\hat{R}\right)\right]^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R^2\left[\hat{R}\times\left(c\hat{R}\times\dot{\vec{v}}\right)\right]}{[cR]^3}$$

$$\vec{E}_{rad} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{\left[\hat{R}\times\left(\hat{R}\times\dot{\vec{v}}\right)\right]}{R} = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{\left[\hat{R}\times\left(\hat{R}\times\dot{\vec{v}}\right)\right]}{R}$$

PROBLEMA 14

Problema 14:
Comprobar que para un sistema aislado de partículas no relativistas con la misma relación carga/masa la radiación es nula.

La radiación que produce una sola de estas partículas no relativistas es, entonces,

$$\vec{E}_{rad\,i} = \frac{\mu_0 q_i}{4\pi} \frac{\left[\hat{R} \times \left(\hat{R} \times \dot{\vec{v}}_i\right)\right]}{R}$$

Usando la ley de Newton para cada partícula, $\vec{F}_i = m_i \dot{\vec{v}}_i$,

$$\vec{E}_{rad\,i} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_i}{m_i} \frac{\left[\hat{R} \times \left(\hat{R} \times \vec{F}_i\right)\right]}{R}$$

El enunciado nos dice que todas las partículas tienen la misma relación carga/masa. Definimos $\mathcal{q} = \frac{q_i}{m_i}$

$$\vec{E}_{rad\,i} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathcal{q} \frac{\left[\hat{R} \times \left(\hat{R} \times \vec{F}_i\right)\right]}{R}$$

PROBLEMA 14

Problema 14:
Comprobar que para un sistema aislado de partículas no relativistas con la misma relación carga/masa la radiación es nula.

$$\vec{E}_{rad\,i} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\left[\hat{R} \times \left(\hat{R} \times \vec{F}_i\right)\right]}{R}$$

Ahora sumemos sobre todas las partículas del sistema aislado,

$$\vec{E}_{rad} = \sum_i \vec{E}_{rad\,i} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\left[\hat{R} \times \left(\hat{R} \times \sum_i \vec{F}_i\right)\right]}{R}$$

Como el sistema está aislado, sin embargo, la sumatoria de fuerzas $\sum_i \vec{F}_i$ es cero, así que el campo de radiación total se anula.

PROBLEMA 15

Problema 15:
Determinar la intensidad de la radiación de una carga que se mueve siguiendo una trayectoria circular en un campo magnético uniforme y constante de magnitud B.

Para hacer este problema necesitamos definir la intensidad radiante. Se hace a través de la potencia.

Recuerden que la potencia es energía por unidad de tiempo. En particular, nos interesa la energía que irradia la fuente.

Por lo tanto nos interesa lo que pasa *muy lejos* de la distribución. Tenemos que integrar el flujo de energía por unidad de tiempo que atraviesa una esfera de radio que tiende a infinito.

Pero el flujo de energía por unidad de tiempo y área está dado por el *vector de Poynting* $\vec{S}$:

$$\vec{S}_{rad} = \frac{\vec{E}_{rad} \times \vec{B}_{rad}}{\mu_0} = \frac{\vec{E}_{rad} \times \left(\frac{\hat{R}}{c} \times \vec{E}_{rad}\right)}{\mu_0}$$

Campo magnético

$$\vec{B} = \frac{\hat{R}}{c} \times \vec{E}$$

$$\vec{S}_{rad} = \frac{1}{\mu_0 c}\left|\vec{E}_{rad}\right|^2 \hat{R}$$

El campo de radiación es perp a $\vec{R}$

$$\vec{E}_{rad} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R\left[\vec{R} \times \left(\left(c\hat{R} - \vec{v}\right) \times \dot{\vec{v}}\right)\right]}{\left[\vec{R} \cdot \left(c\hat{R} - \vec{v}\right)\right]^3}$$

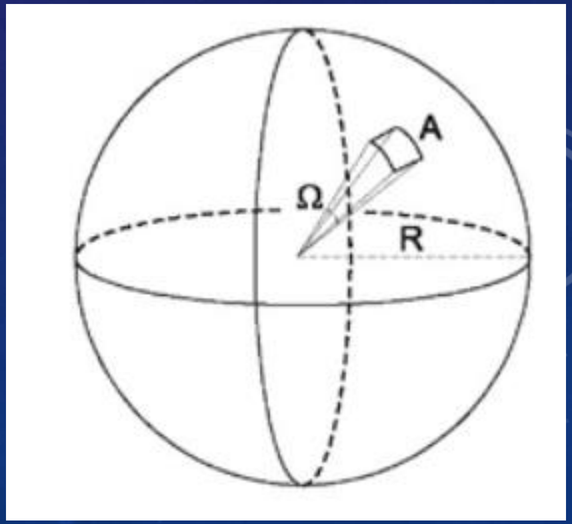
PROBLEMA 15

Problema 15:
Determinar la intensidad de la radiación de una carga que se mueve siguiendo una trayectoria circular en un campo magnético uniforme y constante de magnitud B.

Ahora integramos este vector de Poynting en la esfera de radio infinito para obtener la potencia,

$$P = \int \vec{S}_{rad} \cdot d\vec{S} = \int \vec{S}_{rad} r^2 \cdot \hat{r} \sin\theta \, d\theta d\phi = \int \vec{S}_{rad} r^2 \cdot \hat{r} \, d\Omega$$

Este $d\Omega$ es el diferencial de ángulo sólido. La potencia que se irradia por unidad de ángulo sólido es precisamente la **intensidad de radiación**.



$$\frac{dP}{d\Omega} = \vec{S}_{rad} R^2 \cdot \hat{R}$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{\mu_0 c} \left|\vec{E}_{rad}\right|^2 R^2 \hat{R} \cdot \hat{R} = \frac{1}{\mu_0 c} \left|\vec{E}_{rad}\right|^2 R^2$$

PROBLEMA 15

Problema 15:

Determinar la intensidad de la radiación de una carga que se mueve siguiendo una trayectoria circular en un campo magnético uniforme y constante de magnitud B.

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{\mu_0 c}\left|\vec{E}_{rad}\right|^2 R^2 \hat{R}\cdot\hat{R} = \frac{1}{\mu_0 c}\left|\vec{E}_{rad}\right|^2 R^2$$

Ahora van a tener que calcular este campo de radiación usando la fórmula de antes. Pueden asumir por simplicidad que la partícula es no relativista.

Van a tener que calcular la aceleración, que es la centrípeta que produce el campo magnético. Para esto recuerden la expresión de la fuerza de Lorentz (asumiendo que el campo magnético va en dirección z),

$$\vec{F} = m\dot{\vec{v}} = q\vec{v}\times\vec{B} = -qvB\hat{r}$$