TEMAS DE FÍSICA PARA MATEMÁTICOS
1er cuatrimestre 2020
2 - PRINCIPIOS VARIACIONALES

Problema 1:
Probar que si $\alpha(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$, y sea

$$\int \alpha(x)h(x)dx = 0$$

para cualquier función $h(x)$ continua en dicho intervalo, entonces $\alpha(x) = 0$ para todo x en $[a, b]$.

Problema 2:
Sea $F(x, y, z)$ una función con derivadas primeras y segundas continuas para cualquiera de sus argumentos, y sea $y(x)$ cualquier función continuamente diferenciable para $a \leq x \leq b$ que satisface las condiciones de contorno

$$y(a) = A, \qquad y(b) = B.$$

Probar entonces que la condición de extremal de la funcional

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$$

conduce a la ecuación de Euler

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0.$$

Problema 3:
Sean dos puntos del plano $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$, con $x_1 \neq x_2$, y una curva definida por $y = f(x)$ que une P_1 y P_2. Probar que la longitud de la curva es mínima si la misma es una recta.

Problema 4:
Sea $y(x)$ una función no negativa en el intervalo $[a, b]$.
a) Hallar la curva para la cual la superficie de revolución obtenida al rotar la función alrededor del eje y es mínima.
b) Repetir el inciso anterior si ahora se rota alrededor del eje x.

Problema 5:

a) Una partícula se mueve entre dos puntos $P_1 = (x_1, y_2)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ a lo largo de una trayectoria $y(x)$ en la que el módulo de la velocidad está dada por $v(x, y)$. Encuentre la ecuación diferencial que debe satisfacer la trayectoria para minimizar el tiempo que tarda la partícula en ir de P_1 a P_2.

b) **Problema de la braquistócrona**. Encontrar la curva que une dos puntos en un campo gravitatorio cerca de la superficie terrestre, a lo largo de la cual una partícula que cae partiendo del reposo llega desde el punto más alto al más bajo en el menor tiempo.

Problema 6:

Encontrar la función $f(x)$ tal que la condición de extremal de la funcional

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 + f(x) \right) dt$$

conduzca a:

a) la ley de Galileo de caída de los cuerpos.

b) la ley de movimiento de un cuerpo sometido a una fuerza elástica.

Problema 7:

Se tiene una partícula de masa m colgada verticalmente del techo por medio de un resorte de constante elástica k y longitud natural l_0, en un campo gravitatorio constante y uniforme $\mathbf{g}$.

a) Escribir la acción y hallar la ecuación de movimiento de la partícula.

b) Obtener la posición de la partícula como función del tiempo sabiendo que inicialmente la misma se encuentra en reposo y el resorte está estirado una longitud $3l_0/2$

c) Suponga que la posición del techo respecto de un sistema inercial se mueve de acuerdo a una dada función del tiempo. Encuentre la acción y la ecuación del movimiento en este caso.

Problema 8:

Dada la acción correspondiente a una masa puntual m

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\dot{y}^2 - \frac{k_1}{2}x^2 - \frac{k_2}{2}y^2 \right) dt$$

a) Hallar las ecuaciones de moviemiento de la partícula.

b) Encontrar la posición de la partícula en función del tiempo, suponiendo que la misma parte del reposo y que se encuentra inicialmente en (x_0, y_0). Eliminar el tiempo para obtener la ecuación de la trayectoria. Encuentre las condición bajo la cual las orbitas serán cerradas. Obtenga la representación gráfica de tres diferentes orbitas cerradas de su elección.

Problema 9:
Demostrar que la acción

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(m\dot{x}\dot{y} - \frac{1}{2}\gamma(y\dot{x} - x\dot{y}) - kxy \right) dt$$

corresponde a un sistema de un oscilador amortiguado y un oscilador imagen con amortiguamiento negativo. Note que los osciladores por separado son no conservativos, pero la composición de ambos sistemas es conervativa.

Problema 10:
Una partícula de masa m y velocidad inicial $\mathbf{v_1}$ pasa de un semiespacio en que su energía potencial es igual a U_1 y entra en otro en el cual su energía potencial es igual a U_2. Determinar el cambio en la dirección del movimiento de la partícula. Mostrar que el resultado contradice la vieja hipótesis corpuscular de Newton acerca de la naturaleza de la luz (Sugerencia: ver la ley de refracción en algún libro de óptica -por ej. Hecht y Zajac, o Jenkins y White- y recordar que la velocidad de la luz es distinta en distintos medios de propagación).

Problema 11:
Encontrar la ley de transformación del Lagrangiano y la acción cuando se pasa de un sistema de referencia inercial K a otro sistema inercial K' que se mueve con velocidad $\mathbf{V}$ respecto del primero. Expresar el resultado en términos de la masa total, de la posición del centro de masa respecto del sistema K', y del impulso respecto del mismo sistema.

Problema 12:
Escriba el Lagrangiano de un sistema con potencial central en coordenadas polares, y en un sistema rotante. Suponga el movimiento en dos dimeniones. Observe cómo emergen de la energía cinética los potenciales asociados a las fuerzas de inercia. Opcional: repetir en tres dimensiones.

Problema 13:
Dada la funcional

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx \ ,$$

se quiere encontrar la curva $y(x)$ entre todas las que verifiquen

$$y(a) = A \ , \quad y(b) = B \ ,$$

tal que $J[y]$ tenga un extremo, y tal que la funcional $K[y]$ tome cierto valor

$$K[y] = \int_a^b G(x, y, y')dx = l$$

(se dice entonces que se busca una extremal sujeta al vínculo $K = l$). Demostrar que si $y = y(x)$ no es una extremal de $K[y]$, existe una constante λ tal que $y = y(x)$ es solución de la ecuación diferencial

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \lambda \left(G_y - \frac{d}{dx}G_{y'} \right) = 0 \ .$$

Problema 14:
En la parte más alta de un aro vertical se coloca una partícula pesada. Calcular la reacción del aro sobre la partícula por medio de los multiplicadores de Lagrange y de las ecuaciones de Lagrange. Hallar la altura a la cual se separa del aro la partícula.

Problema 15:
Una partícula de masa m desliza sin rozamiento por un bloque triangular de ángulo α y masa M que puede deslizar sin rozamiento sobre una superficie horizontal. Tratando la ligadura de la partícula sobre el bloque, y la del bloque sobre el piso, por el método de los multiplicadores de Lagrange, hallar las ecuaciones de movimiento de la partícula y el bloque. Obtener una expresión para las fuerzas de ligadura.