TEMAS DE FÍSICA PARA MATEMÁTICOS

1er cuatrimestre 2020

3 - MECÁNICA

Problema 1:

Indicar, justificando, las componentes del impulso $\mathbf{p}$ y del impulso angular $\mathbf{M}$ que se conservan en el movimiento de una partícula en los siguientes campos:

a) Campo de un plano homogeneo.

b) Campo debido a dos cuerpos puntuales.

c) Campo de un semiplano homogéneo.

d) Campo debido a un cono homogéneo.

Problema 2:

Un partícula de masa m y velocidad inicial $\mathbf{v_1}$ pasa de un semiespacio en que su energía potencial es igual a U_1 y entra en otro en el cual su energía potencial es igual a U_2. Determinar el cambio en la dirección de movimiento de la partícula.

Problema 3:

Suponga una partícula de masa m sometida a un potencial externo V. Considere los casos en los que el potencial presenta las siguientes invariancias (con δ infinitesimal):

a) $V(x,y,z) = V(x,y,z+\delta)$

b) $V(x,y,z) = V(x+3\delta, y-2\delta, z+\delta/2)$

c) $V(x,y,z) = V(x, y+z\delta, z-y\delta)$

d) $V(\rho,\theta,\varphi) = V(\rho+\delta,\theta,\varphi)$ (Coordenadas esféricas)

e) $V(\rho,\varphi,z) = V(\rho,\varphi+\delta, z+\frac{5}{8}a\delta)$ (Coordenadas cilíndricas)

Encontrar en cada caso, si existen, constantes de movimiento relacionadas con estas invariancias. En cada caso además indique de que transformación de simetría se trata.

Problema 4:

Así como se demuestra la relación $t'/t = (l'/l)^{1-k/2}$ (donde k es el grado de homogeneidad de la energía potencial) entre los tiempos y las distancias de trayectorias semejantes, encontrar las relaciones análogas para las velocidades, las energías y los impulsos angulares en relación con las distancias.

Problema 5:

La energía potencial de un cuerpo de masa m que realiza un movimiento unidimensional está dada por una función $U(x)$ que tiene un único mínimo en el punto x_0. El cuerpo tiene una energía inicial E tal que $E = U(x_1) = U(x_2)$, con $x_1 < x_0 < x_2$. Encontrar una expresión para el período del movimiento del cuerpo. Considérese por separado el caso particular en que $U(x) = \alpha(x - x_0)^2$, con $\alpha > 0$.

Problema 6:

Encontrar una expresión para el período de las oscilaciones de un péndulo plano en el campo gravitatorio terrestre, en función de su amplitud descripta por el ángulo máximo ϕ_0. Mostrar explícitamente que para $\phi_0 \ll 1$ el período no depende de la amplitud.

Problema 7:

Escribir la lagrangiana para un péndulo plano cuyo punto de suspensión se desplaza uniformemente, con una frecuencia f, sobre una circunferencia vertical de radio R.

Problema 8:

Determinar las pequeñas oscilaciones de un péndulo doble coplanario.

Problema 9:

a) Considérese un sistema formado por una partícula de masa m_1 y otra de masa m_2 que se atraen gravitatoriamente. Reducir el problema al del movimiento de un único cuerpo. Ayuda: elegir un sistema de referencia tal que el origen coincida con el centro de masa del sistema de los dos cuerpos.

b) Considérese un sistema formado por una partícula de masa M y n partículas de masa m. Reducir el problema al del movimiento de las n partículas, escribiendo el Lagrangiano del sistema en forma análoga a lo hecho en el problema de dos cuerpos.

Problema 10:

Una particula de masa m sujeta a la acción de un resorte de constante elástica k y longitud natural l_0 puede moverse sobre una mesa sin rozamiento. Encontrar el Lagrangiano del sistema en coordenadas polares y las ecuaciones de movimiento. Establezca qué cantidades se conservan y obtenga el potencial efectivo en la dirección radial. Describa el movimiento cualitativamente, identifique los puntos de retorno y establezca la condición de órbitas cerradas para pequenas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio.

Problema 11:

En el caso de una partícula en un campo central, la existencia de un "potencial centrífugo" que diverge cuando $r \to 0$ conduce a que no sea siempre posible alcanzar el centro. Mostrar cuáles son las condiciones sobre el potencial $U(r)$ tales que se pueda alcanzar el centro.

Problema 12:

Integrar las ecuaciones de movimiento de una partícula en un campo central cuyo potencial es $U = -\alpha/r^2$ con α positivo. Analizar los casos

$$\begin{aligned} E > 0, &\qquad l^2/2m > \alpha \\ E > 0, &\qquad l^2/2m < \alpha \\ E < 0, &\qquad l^2/2m > \alpha \end{aligned}$$

y mostrar que en los dos últimos la partícula alcanza el centro en un tiempo finito; calcular ese tiempo.