Temas de mecánica cuántica - 2do cuatrimestre 2008
Problemas introductorios sobre información cuántica

*Los ejercicios más "avanzados" están señalados con *.*

1. Cualquier operador unitario sobre una partícula de spin 1/2 puede escribirse como $U = e^{i\alpha} R_{\hat{n}}(\phi)$, con $R_{\hat{n}}(\phi) = e^{-i\phi\hat{n}\cdot\vec{\sigma}/2}$ (esto es una rotación en ángulo ϕ en torno del eje $\hat{n}$, el valor de α no tiene significado físico por ser una fase global). Hallar valores de $\alpha, \hat{n}, \phi$ que correspondan a las operaciones:
$$a) \quad H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b) \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$
Ayuda: ver que H intercambia los autoestados de σ_x y σ_z de igual autovalor (¿a qué rotación corresponde esto?), mientras que S es diagonal en la base de autoestados de σ_z.

2. Suponga que dispone de un instrumento capaz de manipular dos partículas de spin 1/2 controlando a voluntad las funciones $B_k^{(j)}(t)$ y $C_k(t)$ que aparecen en el Hamiltoniano
$$H = \sum_{k=1,2,3} B_k^{(1)}(t)\ \sigma_k \otimes \mathbb{I} + B_k^{(2)}(t)\ \mathbb{I} \otimes \sigma_k + C_k(t)\ \sigma_k \otimes \sigma_k$$
donde σ_k son las matrices de Pauli.
   a) Encuentre funciones $B_k^{(j)}(t)$ y $C_k(t)$ tales que el operador de evolución temporal U genere la "compuerta $CNOT$", en que el estado del primer spin controla la aplicación del operador σ_x sobre el segundo, $U = |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{I} + |1\rangle\langle 1| \otimes \sigma_x$. Obs: conviene pensar en funciones constantes a trozos, es decir, que la evolución temporal total corresponda a la composición de evoluciones con distintos Hamiltonianos constantes a lo largo de ciertos intervalos de tiempo.
   b) Repita para la transformación siguiente:
$$|00\rangle \to |\beta_{00}\rangle, \quad |01\rangle \to |\beta_{01}\rangle, \quad |10\rangle \to i|\beta_{10}\rangle, \quad |11\rangle \to i|\beta_{11}\rangle$$
donde $|\beta_{jk}\rangle$ son los estados de Bell: $|\beta_{jk}\rangle = (|0,k\rangle + (-1)^j|1,1-k\rangle)/\sqrt{2}$.

3. Considere un sistema de cuatro partículas de spin 1/2.
   a) Combinando operaciones físicas como las descriptas en los problemas anteriores (manipulando a lo sumo dos spines a la vez) diseñe un método para preparar, a partir de $|0000\rangle$, el estado $|GHZ\rangle = (|0000\rangle + |1111\rangle)/\sqrt{2}$.
   Ayuda: considere primero cómo puede crear, para el caso de dos partículas, el estado de Bell $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ usando H y $CNOT$. Luego agregue una tercer partícula, y después una cuarta.
   b) Para el estado $|GHZ\rangle$, calcule la matriz densidad reducida de cada partícula.

4. (*) Considere un sistema de cuatro partículas de spin 1/2.
   a) Encuentre los autoestados comunes de $M_1 = Z_1Z_2Z_3Z_4$, $M_2 = X_1X_2$, $M_3 = X_1X_3$, $M_4 = X_1X_4$.
   Ayuda: Nuevamente puede empezar pensando en el caso de dos partículas (la extensión no es igual que en el problema anterior, pero se puede resolver con las mismas operaciones).
   b) Describa un método para medir simultáneamente estos cuatro operadores utilizando analizadores de Stern-Gerlach y operaciones controladas en las que los spines interactúan a lo sumo de a pares.

5. Considere el Hamiltoniano de Heisenberg de dos partículas de spin 1/2:
$$H = \hbar\omega\vec{\sigma}\cdot\vec{\sigma} = \hbar\omega(X \otimes X + Y \otimes Y + Z \otimes Z)$$

a) Muestre que los estados de Bell son autoestados de este operador y halle las energías correspondientes.

b) Suponga que tiene un estado térmico a temperatura T, es decir,

$$\rho = \frac{\sum_n e^{-\beta E_n} |n\rangle\langle n|}{\sum_n e^{-\beta E_n}}$$

donde $|n\rangle$ son los autoestados de H, E_n sus energías, y $\beta = 1/kT$. Muestre que en este caso el estado resulta de la forma $\rho_{AB} = (1-p)|\psi_-\rangle\langle\psi_-| + (p/4)\mathbb{I}$, donde $|\psi_-\rangle = (|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$. ¿Cuánto vale p como función de β? ¿Qué rango de valores puede tomar p? Hallar los estados correspondientes a los casos límite e interpretar en relación con los límites de alta y baja temperatura.

c) Demuestre que la evolución temporal generada por este Hamiltoniano es tal que:

$$U(t)|01\rangle_y = \alpha(t)|01\rangle_y + \beta(t)|10\rangle_y, \quad U(t)|10\rangle_y = \beta(t)|01\rangle_y + \alpha(t)|10\rangle_y$$

donde $|jk\rangle_y$ corresponde al autoestado de $\sigma_y^{(1)}$ y $\sigma_y^{(2)}$ con autovalor $(-1)^j$ y $(-1)^k$ respectivamente. En ambos casos, diga qué sucede si en el instante t se mide la componente x del primer spin y la z del segundo. Considere como caso particular los instantes en que $\alpha(t) = i\beta(t)$.

6. (*) El rey y el físico (Aharonov): Un físico naufraga y llega a una isla que, desgraciadamente para él, resulta estar llena de físicos. Allí gobierna un rey que decide eliminar al náufrago a menos que éste sea capaz de resolver el siguiente desafío: "Deberás preparar una partícula de spin 1/2 y entregármela. Yo realizaré sobre ella un experimento que consistirá en medir alguna de las tres componentes cartesianas (x, y, z) de su spin. Luego te devolveré la partícula para que la analices. Tú podrás hacer todos los experimentos que desees. Cuando hayas concluido, yo te diré cuál fue mi experimento y tú deberás decirme cuál fue su resultado." ¿Es posible que el físico salve su vida? ¿Cuál es su probabilidad de supervivencia?
Elegir alguna de las siguientes opciones, o proponer otra, para lograr que el físico siempre pueda acertar la adivinanza:
Forma de solución #1: tal vez la vida del físico depende de que haya resuelto el último punto del problema anterior, y de que pueda preparar el estado inicial $(|01\rangle_y + |10\rangle_y)/\sqrt{2}$.
Forma de solución #2: alternativamente, puede depender de que sea capaz de encontrar una base de dos qubits en la que cada vector sea ortogonal a otros tres vectores, asociados a los distintos resultados que el rey puede obtener.
Obs: si el físico no apela al entrelazamiento, su probabilidad de sobrevivir no puede ser igual a 1 (pero no es trivial probar esto... en cambio, sí es fácil ver que, preparando un estado en z y midiendo en x, la probabilidad es de 5/6).

7. *a*) Dada una base ortonormal $B = \{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$ de estados de 1 qubit, diseñar un circuito que copie los estados $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$, o sea que mapee: $|\psi_i\rangle|0\rangle \to |\psi_i\rangle|\psi_i\rangle$ $(i = 1, 2)$.
Ayuda: usar $CNOT$ y la operación de cambio de la base computacional a la base B.

b) Mostrar que si $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ son distintos pero no son ortogonales, no es posible hallar un operador unitario U que realice la operación descripta en el punto *a*).
Ayuda: Los operadores unitarios preservan el producto interno.

c) Usando la linealidad de la mecánica cuántica, mostrar que por medio de evoluciones no unitarias (que por ejemplo involucren mediciones) tampoco es posible realizar esa operación con estados arbitrarios.

d) Mostrar que un aparato capaz de distinguir entre dos estados arbitrarios conocidos $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ permitiría realizar la operación de "clonación" descripta, y que, a su vez, un aparato capaz de clonar permitiría distinguir entre esos dos estados.

8. Dado uno de dos estados conocidos, $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$, tales que $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \delta$, se quiere adivinar cuál de los dos estados se tiene. Diseñar, utilizando rotaciones y mediciones en una base ortonormal arbitraria, un protocolo que tenga la máxima probabilidad de acertar, dada por $1/2 + 1/2\sqrt{1-\delta^2}$. Ayuda: más que pensar en obtener esta probabilidad, conviene pensar el problema en términos geométricos. (Obs: este resultado es óptimo, incluso permitiendo operaciones más generales).

9. Los estados máximamente entrelazados de dos qubits son los que se obtienen a partir de cualquier transformación unitaria local del estado de Bell $|\phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ (donde Alice tiene el primer qubit y Bob el segundo). En este ejercicio se justifica esta noción de "entrelazamiento máximo" mostrando que cualquier otro estado de dos qubits puede obtenerse de este estado aplicando LOCC (*local operations and classical communication*, operaciones locales y comunicación clásica).

   a) Mostrar que a partir de $|\phi_+\rangle$ se puede obtener $|\varphi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$ con probabilidad 1 usando LOCC, de la siguiente manera:
   - En primer lugar, agregar un qubit auxiliar en estado $|0\rangle$ para Alice.
   - A continuación, aplicar la operación unitaria local $|00\rangle \to \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$; $|01\rangle \to \beta|01\rangle + \alpha|10\rangle$ sobre los dos qubits de Alice (en esta notación el primer qubit es el auxiliar; sólo se define el efecto de la operación sobre dos de los cuatro estados de la base computacional, extienda la definición a la base completa de modo que sea unitaria).
   - Finalmente, realizar una medición del qubit auxiliar. ¿Qué instrucciones debe dar Alice a Bob de acuerdo al resultado que obtenga?

   b) Teniendo en cuenta el punto anterior, explicar cómo a partir de cualquier estado máximamente entrelazado de dos qubits puede obtenerse cualquier estado de dos qubits. Ayuda: puede ser útil tener en cuenta primero el caso de estados puros (para el cual vale la descomposición de Schmidt) y luego el de estados mixtos.

10. Considere la siguiente situación: un físico prepara una partícula de spin 1/2 en un estado puro. A continuación, la envía a otro laboratorio. Sin embargo, en el camino la partícula sufre la acción de campos magnéticos externos aleatorios. Este efecto puede modelarse de la siguiente manera: con probabilidad p_k, la partícula sufre una rotación en π en torno del eje cartesiano $\hat{e}_k$, con $k = 1, 2, 3$ (por supuesto $\sum_{k=0}^{3} p_k = 1$, donde p_0 es la probabilidad de que el estado no se altere).

    a) A partir del estado inicial $\rho = (\mathbb{I} + \hat{n}\cdot\vec{\sigma})/2$, escribir cuál es el estado final, para cada una de las cuatro evoluciones posibles.

    b) Escribir cuál es el estado final, si se tiene en cuenta la superposición estadística de las cuatro posibles evoluciones.

    c) Graficar en la esfera de Bloch el efecto del campo externo para los siguientes casos:
    1) $p_x = p_y = p_z$ (canal despolarizante, con simetría de rotación).
    2) $p_x = p_y = 0$ (canal desfasante, campo magnético aleatorio sólo en z).
    3) $p_y = p_z = 0$ (canal "bit flip", campo magnético aleatorio sólo en x).

11. (*) Se tiene como sistema una partícula de spin 1/2 en un estado inicial $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. El entorno de esta partícula se puede modelar por un conjunto de n partículas de spin 1/2, cada una de ellas en un estado inicial $cos(\varphi)|0\rangle + sin(\varphi)|1\rangle$. El sistema y el entorno interactúan con un Hamiltoniano tipo Ising: $H_I = Z_S \otimes \sum_{j=1}^{n} Z_j$ (donde el subíndice S refiere al sistema y $j = 1, \ldots, n$ a las partículas del entorno).

    a) Hallar el estado del universo (sistema+entorno) como función del tiempo.

    b) Hallar la matriz densidad reducida del sistema, también como función del tiempo, y describir cualitativamente su evolución (recordar que todos los operadores Z conmutan, y que $Tr(\rho_1 \otimes \rho_2) = Tr(\rho_1)Tr(\rho_2)$). Hallar el módulo del factor dependiente del tiempo que multiplica a los términos no diagonales de la matriz densidad.

c) ¿Se asemeja esta situación a alguno de los canales de ruido descriptos en el problema anterior?

12. Dada una partícula de spin 1/2, a la que llamamos A, considerar el POVM definido por los cuatro operadores positivos: $M_1 = \frac{1}{2}|\uparrow\rangle\langle\uparrow|_z$, $M_2 = \frac{1}{2}|\downarrow\rangle\langle\downarrow|_z$, $M_3 = \frac{1}{2}|\uparrow\rangle\langle\uparrow|_x$, $M_4 = \frac{1}{2}|\downarrow\rangle\langle\downarrow|_x$. Las probabilidades asociadas a los distintos resultados son $p_i = Tr(\rho M_i)$, con ρ el estado de la partícula.

    Mostrar que, si se introduce una partícula auxiliar B, de spin 1/2 y en un estado completamente mixto, el POVM mencionado puede realizarse por medio de una medición de von Neumann en una base ortonormal $\mathcal{B}$ del sistema de dos partículas. Encontrar además cuál es la operación de cambio de base de $\mathcal{B}$ a la base computacional de dos qubits.

    Ayuda: dada una medición con proyectores P_i del sistema compuesto, las probabilidades están dadas por: $p'_i = Tr_{A,B}[(\rho \otimes \frac{\mathbb{I}}{2})P_i]$. Encontrar los proyectores P_i tales que, si se traza primero sobre el subsistema auxiliar según: $p'_i = Tr_A[\rho\ Tr_B(\frac{\mathbb{I}}{2}P_i)]$, se obtiene para la partícula A el POVM deseado.