Temas de mecánica cuántica - 2^{do} cuatrimestre 2008
Problemas sobre entrelazamiento

*Los ejercicios más "avanzados" están señalados con *.*

1. Para un estado puro $|\psi\rangle$, la medida de entrelazamiento más usual es la "entropía de entrelazamiento":
$$E(|\psi\rangle\langle\psi|) = S(\mathrm{tr}_A|\psi\rangle\langle\psi|) = S(\mathrm{tr}_B|\psi\rangle\langle\psi|)$$
donde S es la entropía de von Neumann $S(\rho) = -\mathrm{tr}[\rho \log_2 \rho]$, y tr_B denota la traza parcial sobre el subsistema B.

   a) Mostrar que si el estado es separable $S = 0$ (tener en cuenta que $\lim_{x\to 0} x \log_2 x = 0$), y que si $|\psi\rangle = (1/\sqrt{N}) \sum_j |j\rangle|j\rangle$ entonces $S = \log_2(N)$.

   b) Demostrar que $S(\mathrm{tr}_A|\psi\rangle\langle\psi|) = S(\mathrm{tr}_B|\psi\rangle\langle\psi|)$ (ayuda: usar la descomposición de Schmidt).

   c) Mostrar por qué esta medida de entrelazamiento no sirve para estados mixtos (reemplazando $|\psi\rangle\langle\psi|$ por ρ) dando un ejemplo de un estado separable para el que $E \neq 0$. Demostrar que además, para estados arbitrarios no es cierto que $S(\mathrm{tr}_A\rho) = S(\mathrm{tr}_B\rho)$.
   Obs: un requisito usual para que algo se considere una auténtica "medida de entrelazamiento" es que sea igual a E en el caso de estados puros.

   d) (*) Suponer que se tienen 2 copias del estado bipartito $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, es decir, si ρ es el estado de un par entrelazado, hay 2 de estos pares, donde Alice tiene el primer elemento de cada par (subsistemas A_1, A_2) y Bob el segundo (B_1, B_2). Mostrar que entonces $E(\rho_{A_1B_1} \otimes \rho_{A_2B_2}) = 2E(\rho)$. Mostrar también que para n copias $E(\rho^{\otimes n}) = nE(\rho)$, y que para dos estados bipartitos diferentes $E(\rho_1 \otimes \rho_2) = E(\rho_1) + E(\rho_2)$ (es decir E es una cantidad extensiva).

2. Se define la transpuesta parcial del estado $\rho = \sum \rho_{ij,kl}|i\rangle\langle j| \otimes |k\rangle\langle l|$ respecto del subsistema B en la forma:
$$\rho^{T_B} = \sum_{i,j,k,l} \rho_{ij,kl}|i\rangle\langle j| \otimes |l\rangle\langle k|.$$

   a) Mostrar que la transpuesta parcial sigue siendo hermítica (y por lo tanto diagonalizable con autovalores reales). Obs: el espectro de autovalores de esta matriz es independiente de cuál base se elija para la transposición.

   b) Mostrar que si un estado es separable entonces la matriz transpuesta parcial es (semi)definida positiva (condición PPT, *positive partial transpose*). Esto quiere decir que los autovalores son todos no negativos, o equivalentemente que $\langle\varphi|\rho^{T_B}|\varphi\rangle \geq 0\ \forall|\varphi\rangle$. Ayuda: empezar escribiendo $\langle\varphi|\rho^{T_B}|\varphi\rangle$ para $\rho = \sum_j p_j\ \rho_j^{(1)} \otimes \rho_j^{(2)}$.
   Obs: en un sistema de dos qubits, también vale la recíproca, es decir PPT implica separabilidad.

   c) La condición PPT implica que el "entrelazamiento destilable" (relacionado con la cantidad de pares de Bell que pueden obtenerse por LOCC a partir de un cierto estado bipartito) es $E_D(\rho) = 0$. Esta propiedad inspira la definición de la negatividad, que está dada por:
$$N(\rho) = \frac{\mathrm{Tr}[\sqrt{(\rho^{T_B})^2}] - 1}{2}.$$
   Mostrar que N puede reescribirse en la forma:
$$N = \frac{\sum_i |\lambda_i| - \lambda_i}{2}$$
   con λ_i los autovalores de la matriz transpuesta parcial. Interpretar.

3. Considere el Hamiltoniano de Heisenberg de dos partículas de spin 1/2: $H = \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}$. Recuerde que un estado térmico es de la forma $\rho_{AB} = (1-p)|\psi_-\rangle\langle\psi_-| + (p/4)\mathbb{I}$, donde $|\psi_-\rangle = (|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$.

   a) Calcule la negatividad como función de p. ¿Para qué valores de p es no nula? Ayuda: ver que la matriz transpuesta parcial en la base computacional queda diagonal por bloques.

   b) Para dos qubits se define la concurrencia como:

   $$C(\rho) = max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\},$$

   donde los λ_i son las raíces cuadradas de los autovalores de la matriz $\rho(Y_1Y_2)\rho^*(Y_1Y_2)$, ordenadas en forma decreciente.
   Calcular la concurrencia del estado ρ. ¿Para qué valores de p es no nula? Ayuda: recordar que $|\psi_-\rangle$ es autoestado de Y_1Y_2.
   Obs: La concurrencia se utiliza comúnmente para cuantificar el entrelazamiento de dos qubits, pero en rigor no es una medida de entrelazamiento.

4. Un modo operacional de definir el entrelazamiento consiste en establecer que un estado entrelazado es aquél que puede ser usado para teleportar un estado cuántico con mayor fidelidad que la que puede obtenerse con LOCC. En este ejercicio se considera la teleportación con estados mixtos. Suponga que se tiene el estado $\rho_{AB} = (1-p)|\psi_-\rangle\langle\psi_-| + (p/4)\mathbb{I}$.

   a) Suponga que se usa ρ_{AB} para teleportar un qubit en un estado puro $|\varphi\rangle$ de A a B (según el protocolo usual). ¿Cuál es el estado final? Ayuda: como ρ se puede interpretar como mezcla estadística, conviene separarla para aplicar el protocolo; si el recurso es $|\psi_-\rangle$, el estado final es el deseado. Queda pendiente ver cuál es el estado final si el par que sirve de recurso está en el estado mixto $\mathbb{I}/2 \otimes \mathbb{I}/2$.

   b) La fidelidad entre el estado puro $|\varphi\rangle$ y un estado arbitrario cuya matriz densidad es σ se define como $F = \langle\varphi|\sigma|\varphi\rangle = \mathrm{tr}(\sigma|\varphi\rangle\langle\varphi|)$. Si A mide su qubit y le manda un mensaje clásico a B, la máxima fidelidad que puede obtenerse entre el estado inicial y su "copia" es F=2/3. ¿Para qué valores de p el protocolo de teleportación usando ρ_{AB} supera esta fidelidad? Compare con los resultados del ejercicio anterior. Obs: ¡no siempre es tan fácil! (este resultado no se puede generalizar trivialmente).

5. Considere un sistema compuesto por dos subsistemas de dimensión d ("qudits"); la base computacional de cada uno de ellos es $B = \{|j\rangle, j = 0, \ldots, d-1\}$. Dados los estados

   $$|\theta_{qp}\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=0}^{d-1} e^{2\pi ijp/d} |j\rangle|j-q\rangle$$

   a) Mostrar que $\{|\theta_{qp}\rangle, q, p = 0, \ldots, d-1\}$ es una base ortonormal para el sistema compuesto.

   b) Dados los operadores unitarios U y V que actúan sobre uno de los subsistemas en la forma: $U|j\rangle = |j+1 \text{ mod } d\rangle, V|j\rangle = e^{2\pi ij/d}|j\rangle$, mostrar que vale: $|\theta_{qp}\rangle = (V^pU^q) \otimes \mathbb{I}|\theta_{00}\rangle$

   c) Usando los estados $|\theta_{qp}\rangle$, diseñar un protocolo de teleportación de qudits utilizando como recurso un par entrelazado en el estado $|\theta_{00}\rangle$ (inspirarse en el caso de qubits).

   d) Considere un protocolo de código superdenso utilizando como recurso un par de qudits en el estado $|\theta_{00}\rangle$. ¿Cuántos bits de información clásica puede enviar A a B al mandar su partícula cuántica?

6. (*) Las correlaciones en un estado bipartito pueden cuantificarse con la "información mutua" $I(\rho) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho)$, donde $\rho_{A,B}$ son las matrices densidad reducidas y S es la entropía de von Neumann. Por otra parte, la "entropía relativa" $S(\rho||\sigma) = \mathrm{tr}\{\rho \log \rho - \rho \log \sigma\}$ es una medida de la distinguibilidad entre estados cuánticos (un poco extraña porque puede diverger).

   a) Mostrar que $S(\rho||\sigma) \neq S(\sigma||\rho)$ (un ejemplo basta).

b) Mostrar que:

$$I(\rho) = S(\rho||\rho_A \otimes \rho_B)\,.$$

Es decir, las correlaciones están cuantificadas por la comparación del estado total ρ con el estado producto $\rho_A \otimes \rho_B$.

c) La información mutua incluye también correlaciones clásicas: dar un ejemplo de un estado separable (no entrelazado) para el cual $I(\rho)$ es no nula.

7. (*) Para un estado bipartito ρ, se define la "entropía condicional" como $C(A|B) = S(\rho) - S(\rho_B)$. La definición de la "entropía relativa de entrelazamiento" respecto de un cierto set X es:

$$E_R^X(\sigma) = \inf_{\rho\in X} S(\sigma||\rho).$$

(ver el enunciado del problema anterior) donde X puede tomarse como el conjunto de estados separables, o no destilables (no es lo mismo). La entropía relativa de entrelazamiento es una medida de entrelazamiento "intermedia" entre las dos medidas "extremas" dadas por el "costo de entrelazamiento" (E_C) y el "entrelazamiento destilable" (E_D). La entropía relativa de entrelazamiento (cuando X es cualquiera de las dos opciones) está acotada inferiormente por $-C$:

$$E_R(\sigma) \geq \max\{S(\sigma_A), S(\sigma_B)\} - S(\sigma) = \max\{-C(B|A), -C(A|B)\}$$

a) Demostrar esta cota usando que siempre vale $S(\sigma||\rho) \geq 0$, y que para cualquier estado bipartito no destilable ρ resulta:

$$\begin{aligned} S(\sigma_A) + S(\sigma_A||\rho_A) &\leq S(\sigma) + S(\sigma||\rho), \\ S(\sigma_B) + S(\sigma_B||\rho_B) &\leq S(\sigma) + S(\sigma||\rho). \end{aligned}$$

b) $-C(A|B)$ es también una cota inferior para el entrelazamiento destilable:

$$E_D(\rho) \geq \max\{S(\rho_B) - S(\rho), 0\}$$

Esta cota se llama *Hashing Inequality*, y es importante porque es computable, no trivial y al acotar E_D permite acotar muchas otras medidas de entrelazamiento. Existen ejemplos para los cuales esta cota se satura, por ejemplo para el estado $\rho = \alpha|00\rangle\langle 00| + \beta|00\rangle\langle 11| + \beta^*|11\rangle\langle 00| + (1-\alpha)|11\rangle\langle 11|$. Calcular E_D para este estado, para el caso $\alpha = 1/2, |\beta| \leq 1/2$. Graficar E_D como función de $|\beta|$. ¿A qué estados corresponden los casos límite?

8. El estado $(|00\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB})/\sqrt{2} \otimes |0\rangle_C$ es claramente no separable en forma completa; sin embargo, no tiene entrelazamiento tripartito (C es separable de AB). Podemos llamar a este estado 2-entrelazado. Se puede generalizar esta idea, por ejemplo definiendo el set de estados 2-entrelazados como aquéllos estados que no son completamente separables pero pueden escribirse en la forma:

$$\rho = \sum_i p_i \rho_A^{(i)} \otimes \rho_{BC}^{(i)} + \sum_i q_i \rho_B^{(i)} \otimes \rho_{AC}^{(i)} + \sum_i r_i \rho_C^{(i)} \otimes \rho_{AB}^{(i)}$$

con p_i, q_i, r_i no negativos (los estados 3-entrelazados serían los que no pueden descomponerse así). Esta misma idea puede generalizarse a estados k-entrelazados de un conjunto de N subsistemas. Consideremos el caso $N = 3$ en que Alice tiene dos qubits, Bob y Charlie uno cada uno, y el estado es 2-entrelazado, de la forma:

$$\rho_{ABC} = \frac{1}{2}[|0\rangle\langle 0|_{A1} \otimes |\psi_-\rangle\langle\psi_-|(A2,B) \otimes |0\rangle\langle 0|_C + |1\rangle\langle 1|_{A1} \otimes |0\rangle\langle 0|_B \otimes |\psi_-\rangle\langle\psi_-|(A2,C)]$$

Mostrar que dadas dos copias de este estado, si Alice mide su partícula $A1$ puede obtener (con cierta probabilidad) un par de Bell con Bob y otro con Charlie, de modo que el estado final es 3-entrelazado (considerando la partición en subsistemas $A/B/C$). Esto muestra que las definiciones de k-entrelazamiento son problemáticas cuando se consideran múltiples copias de un estado combinadas con operaciones LOCC.

9. Un operador hermítico W es un "testigo de entrelazamiento" si $\langle W\rangle \geq 0$ para todo estado separable, y existen estados entrelazados para los que $\langle W\rangle < 0$. Un testigo permite detectar, en algunos casos, que un estado está entrelazado (aunque no determinar que no lo está).

   a) Considerando el estado de tres qubits $|GHZ\rangle = (|000\rangle+|111\rangle)/\sqrt{2}$, $W = (1/2)\mathbb{I}-|GHZ\rangle\langle GHZ|$ es un testigo de 3-entrelazamiento.

      1) Dar un ejemplo de un estado 3-entrelazado de tres qubits para el que W detecte el 3-entrelazamiento y otro para el que no.
      2) Explicar por qué $W = a\mathbb{I} - |GHZ\rangle\langle GHZ|$ no es testigo de 3-entrelazamiento si $a = 1$ o $a = 0$.

   b) Considerando nuevamente el Hamiltoniano del ejercicio 3, $W = H + 1$ es un testigo de entrelazamiento.

      1) Demostrarlo. Ayuda: demostrar primero que resulta $|\langle H\rangle| \leq 1$ para todo estado producto de dos qubits, usando la representación de Bloch. Luego extender a los demás estados separables. Por último, ver que para el singlete es $\langle W\rangle < 0$.
      2) ¿Para qué valores de temperatura el testigo detecta el entrelazamiento en el estado térmico? Comparar con los valores para los cuales dicho estado está entrelazado.

10. (*) En este ejercicio se muestra un ejemplo en el que Alice logra compartir entrelazamiento con Bob enviándole una partícula C en un estado separable de AB. Inicialmente Alice tiene dos qubits, A y C, y Bob tiene un qubit B. El estado inicial es:

$$\rho_{ABC} = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{3}|\Psi_k, \Psi_{-k}, 0\rangle\langle\Psi_k, \Psi_{-k}, 0| + \sum_{i=0}^{1}\frac{1}{6}|i, i, 1\rangle\langle i, i, 1|$$

   con $|\Psi_k\rangle = (|0\rangle + e^{i\pi k/2}|1\rangle)/\sqrt{2}$.

   a) Mostrar que este estado es completamente separable (no tiene entrelazamiento).

   b) Ahora Alice aplica una operación CNOT sobre sus qubits, con A el control y C el target qubit; esta operación es de la forma $U = |0\rangle\langle 0|_A \otimes \mathbb{I}_C + |1\rangle\langle 1|_A \otimes X_C$. Mostrar que el estado que se obtiene puede llevarse a la forma:

$$\sigma_{ABC} = \frac{1}{3}|\Psi_{GHZ}\rangle\langle\Psi_{GHZ}| + \sum_{i=0}^{1}\frac{1}{6}|i, 1-i, i\rangle\langle i, 1-i, i| + \sum_{i=0}^{1}\frac{1}{6}|i, i, 1-i\rangle\langle i, i, 1-i|$$

   Obs: el estado está escrito de tal forma que el último de estos tres términos es el que se obtiene al aplicar CNOT sobre el último término del estado inicial (la parte que hay que reescribir es la primera).

   c) Explicar por qué el estado anterior necesariamente es separable en la partición B/AC. Usando este dato y sus propiedades frente al intercambio de B con C, mostrar que también es separable según C/AB.

   d) Alice envía C a Bob, quien aplica un CNOT con B (C) como el control (target). Hallar el estado final (se puede llevar a una expresión bastante simple).

   e) Mostrar que el estado tiene entrelazamiento destilable entre A/BC ya que al hacer una medición de C en la base computacional, Alice y Bob pueden obtener un estado máximamente entrelazado. ¿Con qué probabilidad lo logran?

11. (*) Caso de dimensión infinita: en este ejercicio se muestra que en una vecindad arbitrariamente pequeña de un estado producto puro existen estados puros con entrelazamiento arbitrariamente

grande. Considerar el estado $\sigma_0 = |0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0|$ y la secuencia de estados: $\sigma_k = |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$ definidos por:

$$|\psi_k\rangle \quad = \quad \sqrt{1-\epsilon_k}|0\rangle \otimes |0\rangle + \sqrt{\frac{\epsilon_k}{k}} \sum_{n=1}^{k} |n\rangle \otimes |n\rangle,$$

con $\lim_{k\to\infty} \epsilon_k = 0$ y donde $\{|n\rangle : n \in \mathbb{N}_0\}$ es una base ortonormal. Mostrar que $\lim_{k\to\infty} \operatorname{Tr}\sqrt{(\sigma_k - \sigma_0)^2} = 0$, mientras que si $\epsilon_k = \sqrt{1/\log_2 k}$ resulta $\lim_{k\to\infty} E(\sigma_k) = \infty \neq E(\sigma_0) = 0$.

12. (*) En este problema se analiza una familia de estados de dos qutrits (partículas de spin 1) de la forma:

$$\sigma_\alpha = \frac{2}{7}|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+| + \frac{\alpha}{7}\sigma_+ + \frac{5-\alpha}{7}\sigma_-$$

donde $2 \leq \alpha \leq 5$, $|\Psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{i=0}^{2} |i,i\rangle$, $\sigma_+ = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{2} |i,i+1\rangle\langle i,i+1|$, $\sigma_- = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{2} |i,i-1\rangle\langle i,i-1|$ (todas estas operaciones son mod 3).

a) Mostrar que para $4 < \alpha \leq 5$ el estado tiene entrelazamiento destilable, ya que si se realizan las proyecciones locales $(|0\rangle\langle 0|+|1\rangle\langle 1|)\otimes(|0\rangle\langle 0|+|1\rangle\langle 1|)$ (¿a qué operación física puede corresponder esto?) se obtiene un estado equivalente a un estado entrelazado de dos qubits, lo cual siempre es destilable (para dos qubits no existe entrelazamiento ligado). Chequear que sea entrelazado calculando la negatividad.

b) Mostrar que para $2 \leq \alpha \leq 3$ el estado es separable, ya que puede escribirse en la forma:

$$\frac{6}{7}\rho_1 + \frac{\alpha-2}{7}\sigma_+ + \frac{3-\alpha}{7}\sigma_-$$

con $\rho_1 = (|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+| + \sigma_+ + \sigma_-)/3$. Mostrar que ρ_1 es separable escribiéndolo como una superposición estadística de estados producto según:

$$\rho_1 = \frac{1}{9}\left\{\mathbb{I} + \sum_{i\neq j} |ii\rangle\langle jj|\right\} = \int_0^{2\pi} |\varphi\rangle\langle\varphi| \otimes |-\varphi\rangle\langle-\varphi| \frac{d\varphi}{2\pi}$$

con $|\varphi\rangle = (1/\sqrt{3})(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle + e^{-2i\varphi}|2\rangle)$.

c) Mostrar que para $3 < \alpha \leq 4$ el estado es PPT. Sin embargo, según se muestra en arXiv:quant-ph/9806058, este estado es no separable. Por lo tanto, debe tener entrelazamiento ligado. Sugerencia: para diagonalizar la transpuesta parcial, considerar los siguientes bloques: $\{|00\rangle\}$, $\{|11\rangle\}$, $\{|22\rangle\}$, $\{|01\rangle, |10\rangle\}$, $\{|12\rangle, |21\rangle\}$, $\{|20\rangle, |02\rangle\}$.

13. (*) La "discordia" es una medida alternativa de las correlaciones cuánticas que pretende ser más "sensible" que el entrelazamiento (puede haber "discordia" en estados que no son entrelazados). En un sistema bipartito, cuantifica la información ganada sobre el sistema B al efectuar una medición sobre una base $\{|i\rangle\}$ del subsistema A. Por lo tanto, la discordia es una función tanto del estado como de la base en que se mide. Está emparentada con la información mutua (ej. 6), y su definición es:

$$\delta = S(\rho_A) + \bar{S}(\rho'_B) - S(\rho_{AB}), \quad \text{donde} \quad \bar{S}(\rho'_B) = \sum_i p_i \; S\big((|i\rangle\langle i| \otimes \mathbb{I})\; \rho\big)$$

es decir $S(\rho'_B)$ es el promedio de la entropía del estado del subsistema B después de efectuar la medición sobre el subsistema A (se promedia sobre los diferentes resultados posibles con sus respectivas probabilidades p_i).

a) Verificar que en un estado producto la discordia es siempre cero (recordar el ejercicio 1.d).

b) Considerar una vez más el estado mixto del problema 3, y graficar la discordia como función de p. ¿En qué rango es no nula? Comparar con los valores para los que hay entrelazamiento. Ayuda: como el estado es invariante frente a rotaciones, la discordia es independiente de la base en que se mida el sistema A, y además la entropía del estado final es independiente del resultado de la medición.