Temas de mecánica cuántica - 2do cuatrimestre 2008
Problemas sobre computación cuántica

*Los ejercicios más "avanzados" están señalados con *.*

1. *a*) Probar que $HXH = Z$, $HYH = -Y$, $HZH = X$.
   b) Probar que $XR_y(\phi)X = R_y(-\phi)$, $XR_z(\phi)X = R_z(-\phi)$.
   c) Cualquier operador unitario sobre un qubit puede descomponerse en la forma: $U = e^{i\alpha}R_z(\beta)R_y(\gamma)R_z(\delta)$; probar que puede escribirse $U = e^{i\alpha}AXBXC$, con $ABC = \mathbb{I}$. Ayuda: tomar $A = R_z(\beta)R_y(\gamma/2)$, $B = R_y(-\gamma/2)R_z(-(\delta+\beta)/2)$.
   d) Probar que la compuerta C-U (U controlado) no es equivalente a C-$e^{i\phi}U$ (excepto cuando $\phi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$).

2. Notación: para n qubits, se nota $|\vec{x}\rangle = |x_1\rangle \dots |x_n\rangle$, con $x_j \in \{0,1\}$. Dada una función $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, se define el operador U_f que actúa en la forma: $U_f|\vec{x}\rangle|k\rangle = |\vec{x}\rangle|k \oplus f(\vec{x})\rangle$ (la notación $a \oplus b$ se usa para $a+b$ módulo 2, y $k \in \{0,1\}$).
   a) ¿Cuál es la función f para la que U_f corresponde a la compuerta $CNOT$?
   b) Ver que U_f transforma $|\vec{x}\rangle|-\rangle$ en $(-1)^{f(\vec{x})}|\vec{x}\rangle|-\rangle$, donde $|-\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/2$.
   c) El item *b*) muestra que con un qubit auxiliar en el estado $|-\rangle$ y una aplicación de U_f se puede implementar el operador $\widetilde{U}_f$ que transforma $|\vec{x}\rangle$ en $(-1)^{f(\vec{x})}|\vec{x}\rangle$; mostrar cómo una sola aplicación de C-$\widetilde{U}_f$ (es decir, $\widetilde{U}_f$ controlado, o sea $|0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{I} + |1\rangle\langle 1| \otimes \widetilde{U}_f$) permite implementar U_f.

3. La compuerta de Hadamard H actúa sobre el estado de la base computacional de un qubit $|k\rangle$ en la forma $H|k\rangle = (|0\rangle + (-1)^k|1\rangle)/\sqrt{2}$. La transformada de Hadamard $H^{\otimes n}$ es el operador que aplica compuertas de Hadamard sobre n qubits a la vez. Mostrar que:

$$H^{\otimes n}|\vec{x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{\vec{z}} (-1)^{\vec{x}\cdot\vec{z}}|\vec{z}\rangle$$

   Observar que como $H^2 = I$, esto implica que:

$$H^{\otimes n} \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{\vec{z}} (-1)^{\vec{k}\cdot\vec{z}}|\vec{z}\rangle = |\vec{k}\rangle$$

4. Mostrar que:

$$H^{\otimes n}\left(\frac{|\vec{x}\rangle + |\vec{x} \oplus \vec{s}\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} \sum_{\vec{z} \in s^\perp} (-1)^{\vec{x}\cdot\vec{z}}|\vec{z}\rangle$$

   donde $\vec{x} \oplus \vec{s}$ es la n-upla que se obtiene al sumar $\vec{x}$ y $\vec{s}$ componente a componente módulo 2, y $s^\perp$ es el espacio de las n-uplas binarias ortogonales a s, o sea $s^\perp = \{\vec{z} \ / \ \vec{z}\cdot\vec{s} = 0 \pmod 2\}$.

5. (*) Este ejercicio se relaciona con el algoritmo de Grover, que no se dio en clase (igual puede hacerse).
   a) Sea U_0 tal que $U_0|\vec{0}\rangle = |\vec{0}\rangle$, $U_0|\vec{x}\rangle = -|\vec{x}\rangle \ \forall \ \vec{x} \neq \vec{0}$. Mostrar que $U_0 = -I + 2|\vec{0}\rangle\langle\vec{0}|$.
   b) Sea $|\psi\rangle = H^{\otimes n}|\vec{0}\rangle$, y $U_\psi = H^{\otimes n}U_0H^{\otimes n}$. Mostrar que $U_\psi = -I + 2|\psi\rangle\langle\psi|$.
   c) Probar que un estado $|\phi\rangle = \sum_{\vec{x}} c_{\vec{x}}|\vec{x}\rangle$ es ortogonal a $|\psi\rangle$ si y sólo si $\sum_{\vec{x}} c_{\vec{x}} = 0$.
   d) Probar que U_ψ invierte los coeficientes respecto del promedio, o sea, si para $|\phi\rangle = \sum_{\vec{x}} c_{\vec{x}}|\vec{x}\rangle$ se define la amplitud promedio $\mu = (1/N)\sum_{\vec{x}} c_{\vec{x}}$, entonces resulta $U_\psi|\phi\rangle = \sum_{\vec{x}}(2\mu - c_{\vec{x}})|\vec{x}\rangle$ (y como $|\psi\rangle$ tiene todos sus coeficientes iguales, $U_\psi|\psi\rangle = |\psi\rangle$).

6. (*) Este ejercicio se relaciona con el algoritmo de Grover, que no se dio en clase. Para hacerlo es necesario buscar material adicional (por ejemplo, el libro de Nielsen y Chuang).

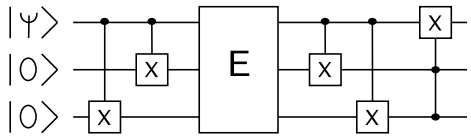
   Sea $f(\vec{x})$ una función con t soluciones (valores de $\vec{x}$ para los que $f(\vec{x}) = 1$). Hallar el número óptimo de iteraciones en el algoritmo de Grover para hallar alguna de las soluciones.

7. Notación: en este ejercicio, los estados de la base computacional se notan $|y\rangle$, con y un número entre 0 y $N-1$ (N es la dimensión del espacio de estados; para sistemas de qubits, $N = 2^n$). En cualquier expresión de la forma $|x\rangle$ en que x sea un número arbitrario, se sobreentiende que se trata del estado $|x \pmod N\rangle$.
   La transformada de Fourier discreta (QFT, por *quantum Fourier transform*) y su inversa actúan sobre los estados de la base computacional $\{|0\rangle, \ldots, |N-1\rangle\}$ de un espacio de dimensión N en la forma:
$$QFT_N|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{y=0}^{N-1} e^{2\pi i x y/N}|y\rangle, \qquad QFT_N^{-1}|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{y=0}^{N-1} e^{-2\pi i x y/N}|y\rangle$$

   a) Calcular $(QFT_N)^2|x\rangle$ y $(QFT_N)^4|x\rangle$.

   b) Hallar los autoestados de $(QFT_N)^2$ y sus autovalores. Indicar los posibles autovalores de QFT_N.

8. (*) Código de tres qubits contra bit-flips:



   a) Mostrar que, si E es la identidad o una compuerta X sobre uno de los tres qubits, entonces en el final del circuito el primer qubit vuelve a su estado original.

   b) Mostrar que, si sobre cada qubit ocurre un error tipo X con probabilidad p (independientemente de lo que les ocurra a los otros) entonces el circuito permite recuperar el estado correcto con probabilidad de al menos $1 - 3p^2 + 2p^3$.

9. Usando el ejercicio anterior, y teniendo en cuenta que $HZH = X$, diseñar un circuito de tres qubits que corrija errores tipo Z (phase-flip) en cualquiera de los tres qubits.