

# Evolución de la discordia gaussiana entre dos osciladores en un entorno común

José Nahuel Freitas

21 de julio de 2011

## Resumen

La discordia cuántica es una medida introducida en el año 2001 para cuantificar la importancia de las correlaciones cuánticas[1]. Permite, a diferencia de lo que sucede con el entrelazamiento, detectar correlaciones cuánticas en estados separables (no entrelazados). Recientemente el estudio de la discordia ha recibido mucha atención. En parte, esta atención está generada por el hecho de que ha surgido evidencia que permite suponer que la discordia podría servir para caracterizar los recursos necesarios para que la computación cuántica tenga ventajas sobre la clásica.

En esta tesis se estudia la evolución de una aproximación a la discordia (llamada discordia gaussiana) en un sistema bipartito que interactúa con un entorno. Analizamos un modelo sencillo donde el sistema está constituido por dos osciladores armónicos, los cuales interactúan con un entorno común también formado por osciladores armónicos. Si bien el modelo es sencillo, se demostró recientemente[2] que presenta una rica variedad de comportamientos para la evolución del entrelazamiento entre las partes del sistema. En esta tesis se compara el comportamiento de la discordia con el del entrelazamiento.

En primer lugar se analiza el valor de la discordia gaussiana y el tipo de medición involucrada para el estado asintótico, es decir una vez que el sistema alcanzó el equilibrio con el entorno. Se muestra que para altas temperaturas del entorno la discordia gaussiana del estado de equilibrio es una función creciente de la temperatura, y que cuando el estado inicial es puro alcanza asintóticamente un valor igual a una unidad de información (la entropía de un qubit en un estado completamente aleatorio). Este comportamiento contrasta fuertemente con el del entrelazamiento, ya que el mismo desaparece para temperaturas suficientemente altas. También se muestra cómo se modifica el valor máximo que puede alcanzar la discordia en el límite de alta temperatura cuando el estado inicial es mixto. Además se estudia mediante simulaciones numéricas como es la evolución de las correlaciones cuánticas desde el estado inicial hasta que se alcanza el equilibrio, confirmando los resultados obtenidos para el estado asintótico.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Modelos</b>	<b>7</b>
2.1. Modelos . . . . .	7
2.2. Ecuación Maestra . . . . .	9
2.2.1. Movimiento browniano cuántico . . . . .	11
2.2.2. Movimiento browniano cuántico con acoplamiento simétrico . . . . .	13
2.3. Densidad espectral y renormalización . . . . .	15
2.3.1. Disipación y estado de equilibrio . . . . .	16
2.4. Estado asintótico general . . . . .	17
2.5. Simulación numérica . . . . .	19
<b>3. Elementos de teoría de la información</b>	<b>21</b>
3.1. Sistemas clásicos . . . . .	21
3.1.1. Entropía de Shannon . . . . .	21
3.1.2. Entropía condicional . . . . .	22
3.1.3. Información mutua . . . . .	23
3.2. Sistemas cuánticos . . . . .	24
3.2.1. Entropía de Von Neumann . . . . .	24
<b>4. Correlaciones Cuánticas</b>	<b>26</b>
4.1. Sistemas cuánticos compuestos . . . . .	26
4.2. Entrelazamiento . . . . .	27
4.2.1. Entropía de entrelazamiento . . . . .	28
4.2.2. Criterio Peres-Horodecki . . . . .	28
4.2.3. Negatividad logarítmica . . . . .	29
4.3. Discordia . . . . .	30
4.3.1. Definición . . . . .	30
4.3.2. Propiedades . . . . .	32

<b>5. Estados Gaussianos</b>	<b>36</b>
5.1. Modos bosónicos . . . . .	36
5.2. Representación en el espacio de fases . . . . .	37
5.3. Algunas propiedades . . . . .	39
5.3.1. Principio de incerteza . . . . .	39
5.3.2. Desplazamientos . . . . .	39
5.3.3. Transformaciones simplécticas . . . . .	40
5.3.4. Diagonalización simpléctica. Invariantes. . . . .	41
5.3.5. Entropía . . . . .	42
5.4. Mediciones gaussianas y óptica cuántica . . . . .	43
5.4.1. Detección homodina . . . . .	43
5.4.2. Medición simultánea de los valores medios de la posición y el momento . . . . .	45
5.4.3. POVM Gaussiano y aplicación sobre sistemas bipartitos	50
5.5. Estados gaussianos de 2 modos . . . . .	51
5.5.1. Entrelazamiento . . . . .	52
5.5.2. Discordia . . . . .	53
5.6. Estados térmicos estrujados . . . . .	56
<b>6. Resultados: dinámica de las correlaciones del sistema</b>	<b>58</b>
6.1. Correlaciones en el estado asintótico . . . . .	58
6.2. Resultados conocidos sobre el entrelazamiento . . . . .	59
6.3. Comportamiento de la discordia . . . . .	62
6.3.1. Acoplamiento simétrico . . . . .	63
6.3.2. Acoplamiento en posición . . . . .	69
6.3.3. Estados iniciales térmicos . . . . .	72
6.3.4. Entornos sub-óhmicos . . . . .	75
6.4. Evolución de las correlaciones . . . . .	77
6.4.1. Acoplamiento simétrico . . . . .	77
6.4.2. Acoplamiento en posición . . . . .	80
<b>7. Conclusiones</b>	<b>84</b>
<b>A. Ecuaciones maestras</b>	<b>87</b>
<b>B. Propiedades de la discordia</b>	<b>91</b>
<b>C. Estados gaussianos</b>	<b>94</b>

# Capítulo 1

## Introducción

En la década del 80' Richard Feynman y David Deutsch iniciaron el campo de la computación cuántica, y desde entonces gran cantidad de energía fue invertida en su desarrollo, tanto teórico como experimental. El interés fundamental en este campo es entender cuáles son las limitaciones que imponen las leyes de la física sobre las computadoras, los dispositivos capaces de procesar información de forma algorítmica para resolver un determinado problema. Esto dio lugar a una visión completamente nueva de la naturaleza de la información, y de la forma en la que esta puede ser transmitida y procesada. En la década del 90', con el descubrimiento por parte de Peter Shor de un algoritmo cuántico capaz de calcular los factores primos de un número entero de forma eficiente, quedó en evidencia que las computadoras cuánticas podrían resolver problemas para los que no se conocían algoritmos clásicos eficientes.

En una computadora cuántica la información se codifica en el estado de algún sistema físico que acepta una descripción mediante la mecánica cuántica. En general este sistema se considera como una colección de subsistemas cuyo espacio de Hilbert es de dimensión 2, llamados 'qubits'. En los modelos canónicos de computación cuántica el estado inicial del sistema es un estado puro, este estado se manipula realizando operaciones en las que intervienen 1 o 2 qubits, y el resultado del cómputo se obtiene realizando mediciones sobre los distintos qubits en el estado final.

¿Cuál es la propiedad de los sistemas cuánticos, o el recurso existente en ellos, que los hace más poderosos que los sistemas clásicos para el procesamiento de información? Si bien esta sigue siendo una pregunta abierta, inicialmente se consideraba que esa propiedad era el entrelazamiento. Por ejemplo, en tareas básicas de comunicación cuántica, como la teleportación y la codificación densa, este juega un rol fundamental[3]. Además, en los modelos de computación cuántica que fueron desarrollados originalmente, el

modelo de circuitos y el basado en medición, también se hace uso del entrelazamiento para resolver eficientemente problemas que no pueden ser resueltos de forma eficiente en computadoras clásicas. En [4] se muestra que cualquier cómputo cuántico con *estados puros* sobre un sistema de  $n$  qubits puede ser simulado eficientemente de forma clásica si el entrelazamiento involucrado en el cómputo cuántico es inferior a cierto valor límite, que crece con  $n$ . Por lo tanto se concluye que las computadoras cuánticas que utilizan estados puros solo pueden ofrecer una ventaja respecto de las clásicas si es posible generar una determinada cantidad de entrelazamiento, que crece con el tamaño del cómputo.

Sin embargo, en 1998 Emmanuel Knill y Raymond Laflamme presentaron un nuevo modelo de computación cuántica que no utilizaba estados puros[5]. En este modelo, llamado DQC1<sup>1</sup>, se dispone de un conjunto  $S$  de qubits en un estado completamente aleatorio, y un único qubit adicional  $M$  en un estado puro, sobre el cual se realizan mediciones para obtener el resultado del cómputo. Si bien este modelo no resulta tan poderoso como el modelo de circuitos, puede resolver eficientemente tareas para las cuales no se conocen algoritmos clásicos eficientes, como por ejemplo evaluar la traza de un operador unitario sobre  $n$  qubits. Lo que llamó la atención de este modelo es que si bien se generan correlaciones entre el qubit  $M$  y los qubits  $S$  el estado global siempre es separable con respecto a esa división, es decir que no se genera entrelazamiento. Esto desafió la visión del entrelazamiento como recurso fundamental para lograr ventajas sobre los sistemas clásicos.

Poco tiempo después, en el año 2001, Harold Ollivier y Wojciech Zurek propusieron una nueva medida para cuantificar las correlaciones cuánticas existentes en un sistema bipartito: la *discordia cuántica*[1]. Esta magnitud es la diferencia entre las correlaciones totales entre las partes de un sistema bipartito y aquellas que pueden obtenerse realizando solamente mediciones locales. Se puede ver que esta nueva medida de correlaciones tiene en cuenta a aquellas presentes en estados entrelazados. Sin embargo existen estados separables, no entrelazados, cuya discordia es no nula. Es decir que a diferencia de lo que se pensaba, los estados separables no son necesariamente clásicos, ya que estos también pueden contener correlaciones ‘no-clásicas’, cuantificadas en el valor no nulo de la discordia. Si bien la definición de la discordia se originó en el estudio del problema de la medición y el proceso de decoherencia, esta medida de correlaciones cuánticas fue recientemente relacionada con la eficiencia del modelo DQC1. En el año 2008, Datta, Shaji y Caves mostraron que la eficiencia en el cálculo de la traza de un operador unitario mediante el modelo DQC1 estaba relacionada con la discordia generada en-

---

<sup>1</sup>Deterministic quantum computation with one qubit.

tre el qubit  $M$  y los qubits  $S$ . Es decir, propusieron a la discordia como una medida de los recursos presentes en ese modelo computacional. El cálculo de la discordia requiere de una optimización que en muy pocos casos puede ser realizada. Para el caso de estados gaussianos de sistemas de variable continua, como los que se utilizan en este trabajo, hasta el momento sólo existe una aproximación: la ‘discordia gaussiana’[6].

Una de las principales dificultades para la construcción de una computadora cuántica está dada por el proceso de decoherencia. La decoherencia es la pérdida de coherencia cuántica debido a la interacción entre el sistema de interés y su entorno. Si se prepara a un sistema cuántico en un estado puro, y este no está completamente aislado de su entorno, su estado evolucionará hacia una mezcla estadística de cierto tipo de estados, llamados ‘estados puntero’. La información codificada en el estado inicial se pierde debido a la interacción del sistema con su entorno. Por este motivo resulta importante entender de qué manera la interacción con un entorno afecta los recursos cuánticos presentes en un determinado sistema. El trabajo que se presenta aquí está relacionado con este último punto.

Durante el desarrollo de esta tesis se estudió la evolución de la discordia gaussiana para un sistema abierto de variable continua. Se trabajó con un modelo sencillo en el cual el sistema consta de dos osciladores armónicos unidimensionales, que interactúan con un entorno común también formado por osciladores armónicos. El comportamiento de la discordia gaussiana se comparó con el del entrelazamiento, el cual ya fue estudiado en detalle por Augusto Roncaglia durante su trabajo doctoral[7]. En primer lugar se caracteriza el valor de la discordia gaussiana para el estado asintótico, es decir el estado en que el sistema está en equilibrio con el entorno. Se muestra que para altas temperaturas del entorno la discordia gaussiana es una función creciente de la temperatura, y que cuando el estado inicial es puro alcanza un valor asintótico igual a una unidad de información, es decir, la entropía de un qubit en un estado completamente aleatorio. Este comportamiento contrasta fuertemente con el del entrelazamiento, ya que este se anula para temperaturas suficientemente altas. Además se estudia mediante simulaciones numéricas cómo es la evolución de las correlaciones cuánticas desde el estado inicial hasta que se alcanza el equilibrio, confirmando los resultados obtenidos para el estado asintótico.

La organización de este informe es la siguiente. En el capítulo 2 se dan los detalles del modelo, los hamiltonianos y las ecuaciones maestras, estableciéndose la notación a utilizar en el resto del trabajo. Se dan los primeros resultados analíticos generales y se muestra cómo obtener el estado asintótico del sistema. También se comenta el método usado para realizar las simulaciones numéricas. En el capítulo 3 se repasan rápidamente los conceptos básicos

de teoría de la información, ya que estos se necesitan para definir la discordia cuántica. En el capítulo 4 se presentan las magnitudes utilizadas para medir las correlaciones cuánticas. Se define la discordia y se discuten sus propiedades más importantes. El capítulo 5 trata sobre la descripción matemática y las propiedades de los estados gaussianos en sistemas de variable continua, los cuales son centrales en todo el trabajo realizado. Las medidas de correlaciones presentadas son calculadas explícitamente para este tipo de estados. Además se discute como son implementadas experimentalmente las llamadas ‘mediciones gaussianas’. En el capítulo 6 se presentan y discuten los resultados obtenidos para la evolución de la discordia. Primero se presentan los resultados analíticos para el estado asintótico y luego las simulaciones numéricas de la evolución temporal. En ambos casos se compara el comportamiento de la discordia con el del entrelazamiento. Finalmente, en el capítulo 7 se dan las conclusiones generales.



# Capítulo 2

## Modelos

En este capítulo se establecen dos modelos que se utilizan en el resto del trabajo. Se considera un sistema bipartito interactuando con un entorno, se detallan los hamiltonianos y se indica cómo pueden ser obtenidas las ecuaciones maestras correspondientes. Por último se indica cómo fueron realizadas las simulaciones numéricas con las que se obtuvieron los resultados expuestos en capítulo 6.

### 2.1. Modelos

Como se adelantó en la introducción, el objetivo de este trabajo fue el estudio de las correlaciones cuánticas entre las dos partes de un sistema bipartito de variables continuas, y especialmente del efecto que tiene sobre estas la interacción entre el sistema y un entorno. El modelo que se utilizó es quizás el más simple que se puede considerar: el sistema  $S$  está formado por dos partículas que se mueven en una sola dimensión bajo la acción de un potencial armónico e interactúan linealmente con un entorno  $E$  también formado por osciladores armónicos unidimensionales (figura 2.1). El mismo sistema fue utilizado en trabajos anteriores en donde se estudia la evolución del entrelazamiento [8, 2]. Además está directamente relacionado con el modelo de movimiento browniano cuántico, en el que se tiene una sola partícula interactuando con el entorno de osciladores, que es un ejemplo paradigmático de sistema cuántico abierto y fue ampliamente utilizado en el estudio del proceso de decoherencia [9, 10, 11, 12].

Aquí se consideran dos variantes de este modelo. En la primera el acoplamiento entre los distintos osciladores es tanto en posición como en momento, mientras que en la segunda el acoplamiento es solamente mediante posición. Más adelante se estudia cómo es que estos detalles de la interacción con el

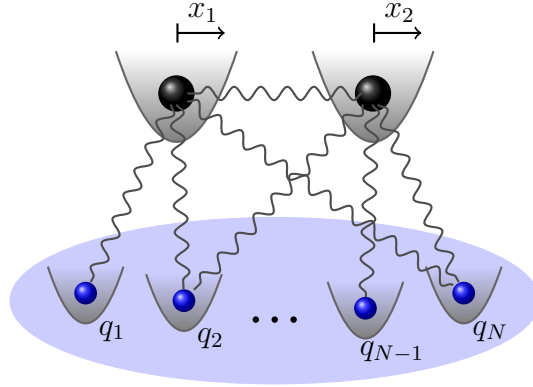


Figura 2.1: Esquema del modelo utilizado.

entorno afectan el estado de equilibrio del sistema. A continuación, por claridad y para introducir la notación, se da el hamiltoniano correspondiente a este modelo cuando el acoplamiento es más general.

El hamiltoniano global es  $H_{SE} = H_S + H_E + H_{int}$ , donde  $H_S$  es el hamiltoniano del sistema,  $H_E$  el del entorno y  $H_{int}$  representa la interacción entre ellos. El sistema está formado por los osciladores 1 y 2:

$$H_S = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x_2^2}{2} + mc_{12}x_1x_2 + \frac{\tilde{c}_{12}}{m\omega^2}p_1p_2 \quad (2.1)$$

donde  $x_i$  y  $p_i$  ( $i = 1, 2$ ) son la posición y momento de cada oscilador. Por simplicidad se toma la misma masa  $m$  y frecuencia  $\omega$  para los dos osciladores. Estos interactúan en posición mediante la constante de acoplamiento  $c_{12}$  y en momento mediante  $\tilde{c}_{12}$ .

El entorno consiste en un conjunto de  $N$  osciladores armónicos con masas  $m_n$  y frecuencias  $\omega_n$  que no interactúan entre si:

$$H_E = \sum_{n=1}^N \frac{\pi_n^2}{2m_n} + \frac{m_n\omega_n^2 q_n^2}{2} \quad (2.2)$$

siendo  $q_n$  y  $\pi_n$  la posición y momento para cada oscilador.

La interacción entre sistema y entorno esta dada por:

$$\begin{aligned} H_{int} &= \sum_{n=1}^N \left( c_n x_1 q_n + \tilde{c}_n \frac{p_1}{m\omega} \frac{\pi_n}{m\omega_n} \right) + \sum_{n=1}^N \left( c_n x_2 q_n + \tilde{c}_n \frac{p_2}{m\omega} \frac{\pi_n}{m\omega_n} \right) \\ &= (x_1 + x_2) \sum_{n=1}^N c_n q_n + \frac{p_1 + p_2}{m\omega} \sum_{n=1}^N \tilde{c}_n \frac{\pi_n}{m\omega_n} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Es decir que los osciladores 1 y 2 interactúan linealmente con todos los osciladores del entorno. La interacción tanto de 1 como de 2 con el oscilador  $n$  del entorno está dada por las constantes de acoplamiento en posición  $c_n$  y en momento  $\tilde{c}_n$ . El hamiltoniano para el caso en que los osciladores sólo interactúan en posición se obtiene de las expresiones anteriores con  $\tilde{c}_n = 0$  y  $\tilde{c}_{12} = 0$ .

En este trabajo el interés es calcular cómo evolucionan las correlaciones cuánticas del sistema, es decir las correlaciones cuánticas entre los osciladores 1 y 2, cuando estos interactúan con el entorno. Por lo tanto es necesario conocer cuál es el estado del sistema, descrito por la matriz densidad  $\rho_S$  correspondiente a los osciladores 1 y 2, a medida que transcurre el tiempo. Dado el estado inicial del conjunto sistema-entorno se puede calcular, mediante la evolución temporal unitaria generada por el hamiltoniano  $H_{SE}$ , el estado del sistema en un tiempo  $t$  arbitrario. Así, si  $\rho_{SE}(0)$  es el estado global a  $t = 0$ , el estado a tiempo  $t$  será:

$$\rho_{SE}(t) = U(t)\rho_{SE}(0)U(t)^\dagger \quad (2.4)$$

siendo  $U(t) = e^{-i\frac{H_{SE}t}{\hbar}}$ . Por lo tanto la matriz densidad  $\rho_S(t)$  para los osciladores del sistema es:

$$\rho_S(t) = Tr_E(\rho_{SE}(t)) \quad (2.5)$$

Esta matriz densidad contiene toda la información necesaria para calcular cualquier medida de correlaciones entre los osciladores 1 y 2. Para determinados estados globales iniciales es posible encontrar una ecuación dinámica para  $\rho_S(t)$  que tenga en cuenta la acción sobre el sistema por parte del entorno pero no incluya explícitamente los grados de libertad de este último. Esta ecuación se conoce como ecuación maestra y a continuación se repasa su derivación para este modelo.

## 2.2. Ecuación Maestra

Para empezar es conveniente realizar un cambio de variables de forma de simplificar el problema, aprovechando el hecho de que el entorno actúa de la misma manera sobre los dos osciladores del sistema. Si se expresa el hamiltoniano de interacción  $H_{int}$  en términos de las coordenadas  $x_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 \pm x_2)$  y  $p_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 \pm p_2)$  se obtiene:

$$H_{int} = x_+ \sum_{n=1}^N \sqrt{2}c_n q_n + \frac{p_+}{m\omega} \sum_{n=1}^N \sqrt{2}\tilde{c}_n \frac{\pi_n}{m\omega_n} \quad (2.6)$$

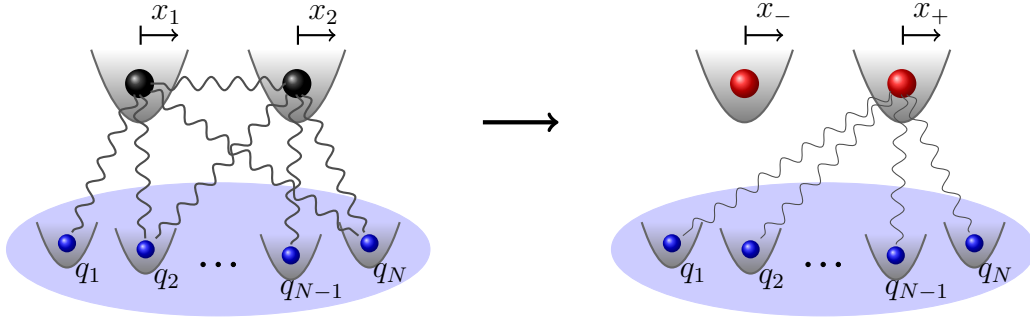


Figura 2.2: Representación esquemática de la transformación de los modos  $1/2$  a los modos  $+/-$ .

Es decir que sólo las coordenadas  $x_+$  y  $p_+$  son afectadas por el entorno. En función de las nuevas coordenadas el hamiltoniano del sistema es:

$$H_S = \frac{p_+^2}{2m_+} + \frac{m_+\omega_+^2 x_+^2}{2} + \frac{p_-^2}{2m_-} + \frac{m_-\omega_-^2 x_-^2}{2} \quad (2.7)$$

Donde las frecuencias y masas correspondientes a los modos  $+$  y  $-$  son:

$$\begin{aligned} m_{\pm} &= m \left( 1 \pm \frac{\tilde{c}_{12}}{\omega^2} \right)^{-1} \\ \omega_{\pm}^2 &= \omega^2 \left( 1 \pm \frac{c_{12}}{\omega^2} \right) \left( 1 \pm \frac{\tilde{c}_{12}}{\omega^2} \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

El hecho de que los modos  $+$  y  $-$  no interactúen entre sí se debe a que se está considerando el caso resonante donde las frecuencias de los osciladores 1 y 2 son las mismas. Esta transformación se representa en la figura 2.2. Nuevamente, para el caso de acoplamiento en posición solo hace falta evaluar las expresiones para  $\tilde{c}_{12} = 0$ .

Por lo tanto se tiene que solo el modo  $+$  interactúa con el entorno mientras que el modo  $-$  evoluciona libremente. La evolución libre del modo  $-$  es trivial y por lo tanto solo resta encontrar la ecuación maestra para un único oscilador, el modo  $+$ , interactuando con el entorno, es decir la ecuación maestra del movimiento browniano cuántico. Esta ecuación fue derivada en forma exacta por primera vez por Hu, Paz y Zhang en 1992[11], para el caso en que el acoplamiento es en posición; y por Roncaglia y Paz en [2] para el caso de acoplamiento simétrico en posición y momento ( $c_n = \tilde{c}_n$ ). A continuación se repasa la derivación más sencilla dada en [13].

### 2.2.1. Movimiento browniano cuántico

En este modelo el sistema  $S$  consiste en un único oscilador:

$$H_S = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \quad (2.9)$$

El entorno es un conjunto de osciladores como en el caso anterior (ecuación 2.2), y la interacción entre sistema y entorno es lineal y mediante la coordenada posición:

$$H_{int} = x \sum_{n=1}^N c_n q_n \quad (2.10)$$

Como el hamiltoniano global  $H_T = H_S + H_E + H_{int}$  es cuadrático en las coordenadas  $\{x, p\}$  y  $\{q_n, \pi_n\}$  la evolución temporal que genera es una transformación gaussiana. Esto significa que si el estado global inicial  $\rho_{SE}(0)$  es gaussiano, también lo es el estado evolucionado  $\rho_{SE}(t)$ <sup>1</sup>. Además, como la traza parcial de un estado gaussiano da como resultado un estado gaussiano, el estado del sistema  $\rho_S(t)$  también lo es (ver capítulo 5). Esto impone restricciones importantes al propagador asociado a la matriz densidad del sistema. Es decir, si  $J(x, x', t|x_0, x'_0, t_0)$  es el propagador que evoluciona  $\rho_S$ :

$$\rho_S(x, x', t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 dx'_0 J(x, x', t|x_0, x'_0, t_0) \rho_S(x_0, x'_0, t_0) \quad (2.11)$$

donde  $\rho_S(x, x', t) = \langle x|\rho_S(t)|x'\rangle$ , entonces el hecho de que la evolución transforme estados gaussianos en estados gaussianos implica que el propagador  $J$  debe ser una función gaussiana de las coordenadas  $\{x, x', x_0, x'_0\}$ . Además, se puede ver que la forma más general para un propagador gaussiano que conserve la hermiticidad y la traza de la matriz densidad es[14]:

$$J(X, Y, t|X_0, Y_0, t_0) = \frac{b_3}{2\pi} e^{-a_{11}Y^2 - a_{12}YY_0 - a_{22}Y_0^2} \times e^{i(b_1XY + b_2X_0Y - b_3XY_0 - b_4X_0Y_0)} \quad (2.12)$$

donde se utilizan las coordenadas  $X = x + x'$  e  $Y = x - x'$  por comodidad. La dependencia temporal está contenida en los coeficientes  $\{a_{ij}\}$  y  $\{b_i\}$ , que dependerán del modelo particular que se esté considerando. A partir de este propagador, derivando la ecuación 2.11, puede obtenerse la ecuación maestra para  $\rho_S$ . Para el caso en que inicialmente el entorno está en un estado térmico  $\rho_E(0)$  y descorrelacionado del sistema,  $\rho_{SE}(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_E(0)$ , el propagador exacto para el movimiento browniano cuántico puede ser obtenido mediante

<sup>1</sup>Esta propiedad es discutida en el capítulo 5 y demostrada en el apéndice C.

integrales de camino y el formalismo de la funcional de influencia de Feynman y Vernon[15]. En ese caso se deriva la siguiente ecuación maestra:

$$\dot{\rho}_S = -i[H_S + \frac{m}{2}\delta\Omega^2(t)x^2, \rho_S] - i\gamma(t)[x, \{p, \rho_S\}] - D(t)[x, [x, \rho_S]] - f(t)[x, [p, \rho_S]] \quad (2.13)$$

Se considera  $\hbar = 1$ . El efecto del entorno sobre el sistema está contenido en los coeficientes dependientes del tiempo  $\delta\Omega^2(t)$ ,  $\gamma(t)$ ,  $D(t)$ ,  $f(t)$ , que dependen de las características del entorno y de su temperatura. Esta ecuación es local en el tiempo pero, debido a la dependencia temporal de los coeficientes, la evolución que genera no es Markoviana. Esta dependencia temporal es complicada, pero su conocimiento no es necesario en este trabajo. Por completitud presentamos aquí las expresiones que se obtienen a partir de un desarrollo perturbativo a 2<sup>do</sup> orden en el acoplamiento entre sistema y entorno. En esa aproximación los coeficientes son:

$$\begin{aligned} \delta\Omega^2(t) &= \frac{-2}{m} \int_0^t \eta(t') \cos(\omega t') dt' & \gamma(t) &= \frac{1}{m\omega} \int_0^t \eta(t') \sin(\omega t') dt' \\ D(t) &= \int_0^t \nu(t') \cos(\omega t') dt' & f(t) &= \frac{-1}{m\omega} \int_0^t \nu(t') \cos(\omega t') dt' \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde  $\eta(t)$  y  $\nu(t)$  son los núcleos de disipación y ruido:

$$\eta(t) = \int_0^\infty J(\omega) \sin(\omega t) d\omega \quad \nu(t) = \int_0^\infty J(\omega) \coth\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) \cos(\omega t) d\omega \quad (2.15)$$

La temperatura  $T$  del entorno solo aparece en  $\nu$  a través de  $\beta = 1/T$  (la constante de Boltzman es  $k_b = 1$ ). Por lo tanto sólo los coeficientes  $D(t)$  y  $f(t)$  dependen de la temperatura. La función  $J(\omega)$  contiene las características relevantes de los osciladores del entorno y su acoplamiento y se conoce como densidad espectral:

$$J(\omega) = \sum_{n=1}^N \delta(\omega - \omega_n) \frac{c_n^2}{2m_n\omega_n} \quad (2.16)$$

Dos entornos con la misma densidad espectral son indistinguibles en lo que respecta a su efecto sobre el sistema.

Para comprender cuál es el efecto de los coeficientes que aparecen en la ecuación maestra es útil derivar a partir de esta las ecuaciones de evolución para los primeros y segundos momentos de los operadores  $x$  y  $p$ . Para los valores medios se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x \rangle &= \frac{\langle p \rangle}{m} \\ \frac{d}{dt} \langle p \rangle &= -m\Omega_R^2(t) \langle x \rangle - 2\gamma(t) \langle p \rangle \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde  $\Omega_R^2(t) = \omega^2 + \delta\Omega^2(t)$  es la frecuencia renormalizada. Por lo tanto, es claro que  $\delta\Omega^2(t)$  representa un cambio en la frecuencia natural del sistema, mientras que  $\gamma(t)$  induce una pérdida de energía. Estos dos coeficientes son independientes de la temperatura. Para comprender los efectos térmicos sobre el sistema hay que estudiar las dispersiones en  $x$  y  $p$ . Las ecuaciones de evolución para los segundos momentos son:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle p^2 \rangle &= -m\Omega_R^2(t)\langle \{x, p\} \rangle - 4\gamma(t)\langle p^2 \rangle + 2D(t) \\ \frac{d}{dt}\langle x^2 \rangle &= \frac{1}{m}\langle \{x, p\} \rangle \\ \frac{d}{dt}\langle \{x, p\} \rangle &= \frac{2}{m}\langle p^2 \rangle - 2m\Omega_R^2(t)\langle q^2 \rangle - 2\gamma(t)\langle \{x, p\} \rangle - 2f(t)\end{aligned}\tag{2.18}$$

Se ve que los dos coeficientes dependientes de la temperatura,  $D(t)$  y  $f(t)$ , aparecen en estas ecuaciones induciendo difusión. Asumiendo que todos los coeficientes alcanzan valores de equilibrio<sup>2</sup>  $\Omega_R$ ,  $D$ ,  $f$  y  $\gamma$ , se puede calcular el valor asintótico de los segundos momentos:

$$m^2\Omega_R^2\langle x^2 \rangle = \frac{D}{2\gamma} - mf \quad \langle p^2 \rangle = \frac{D}{2\gamma} \quad \langle \{x, p\} \rangle = 0\tag{2.19}$$

Es interesante notar que mientras  $D$  induce difusión en ambas coordenadas  $f$  sólo afecta la dispersión de  $x$ . Esto está relacionado con el hecho de que la interacción con el entorno es mediante la coordenada posición. Más adelante se muestra que cuando la interacción con el entorno es simétrica en posición y momento esta distinción entre las dispersiones para  $x$  y para  $p$  desaparece.

## 2.2.2. Movimiento browniano cuántico con acoplamiento simétrico

Aquí se dan rápidamente los resultados que se obtienen cuando el acoplamiento del sistema con el entorno también es mediante momento, señalándose las diferencias con el caso anterior. Se considera la siguiente interacción entre sistema y entorno:

$$H_{int} = x \sum_{n=1}^N c_n q_n + \frac{p}{m\omega} \sum_{n=1}^N \tilde{c}_n \frac{\pi_n}{m_n \omega_n}\tag{2.20}$$

Los hamiltonianos para sistema y entorno son los mismos que en el caso anterior. Para el caso en que las constantes de acoplamiento son tales que

---

<sup>2</sup>Esto sucede siempre para todos los entornos utilizados aquí, excepto cuando la densidad espectral es súper-ohmica (ver sección 2.3).

$c_n = \tilde{c}_n$  se puede deducir la siguiente ecuación maestra[2]:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_S(t) = & \frac{1}{i} [H_S + \delta\tilde{\Omega}^2(t)H_R, \rho_S] - \tilde{D}(t)([x, [x, \rho_S]] + \frac{1}{m\omega^2}[p, [p, \rho_S]]) - \\ & - i\tilde{\gamma}(t)([x, \{p, \rho_S\}] - [p, \{x, \rho_S\}]) \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde  $H_R = \frac{p^2}{2m\omega^2} + \frac{mx^2}{2}$ . Esta ecuación resulta una versión simetrizada de la ecuación maestra para acoplamiento en posición. Se ve que el coeficiente difusivo  $\tilde{D}(t)$  y el coeficiente disipativo  $\tilde{\gamma}(t)$  afectan de la misma forma a los operadores  $x$  y  $p$ . Además no aparece un término proporcional a  $[x, [p, \rho]]$  que era el responsable de la asimetría en las dispersiones de  $x$  y  $p$  en el estado asintótico. Otra diferencia con el caso anterior es que la interacción con el entorno induce una renormalización en la masa del sistema, además de una renormalización en frecuencia. El hamiltoniano efectivo para el sistema es:

$$H'_S = H_S + \delta\tilde{\Omega}^2(t)H_R = \frac{p^2}{2M(t)} + \frac{M(t)\Omega^2(t)x^2}{2} \quad (2.22)$$

Donde  $M(t) = m \left(1 + \delta\tilde{\Omega}^2(t)/\omega^2\right)^{-1}$  y  $\Omega^2(t) = \omega^2 \left(1 + \delta\tilde{\Omega}^2(t)/\omega^2\right)^2$  son la masa y frecuencia renormalizadas.

Las expresiones para los coeficientes  $\delta\tilde{\Omega}^2(t)$ ,  $\tilde{D}(t)$  y  $\tilde{\gamma}(t)$ , en la aproximación a 2<sup>do</sup> orden en las constantes de acoplamiento y las ecuaciones de evolución para los segundos momentos de  $x$  y  $p$  se encuentran en el apéndice A. A partir de esas ecuaciones se obtiene que los valores asintóticos para los segundos momentos son:

$$M^2\Omega_R^2\langle x^2 \rangle = \frac{\tilde{D}}{2\tilde{\gamma}} \quad \langle p^2 \rangle = \frac{\tilde{D}}{2\tilde{\gamma}} \quad \langle \{x, p\} \rangle = 0 \quad (2.23)$$

Se ve que a diferencia del caso en que el acoplamiento con el entorno es sólo mediante la coordenada posición, en este caso las dispersiones en  $x$  y  $p$  son afectadas de la misma manera y por lo tanto se verifica el principio de equipartición para un oscilador armónico en equilibrio térmico, según el cual  $\langle \frac{p^2}{2m} \rangle = \langle \frac{m\omega^2 x^2}{2} \rangle$ .

Volviendo al caso de interés, el del sistema formado por los osciladores 1 y 2 interactuando con el entorno, a partir de lo expuesto en estas secciones puede expresarse fácilmente la ecuación maestra para el estado del sistema. Por ejemplo para el caso de acoplamiento simétrico la ecuación maestra es:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_S(t) = & \frac{1}{i} [H_S + \delta\tilde{\Omega}^2(t)H_R, \rho_S] - \tilde{D}(t)([x_+, [x_+, \rho_S]] + \frac{1}{m\omega^2}[p_+, [p_+, \rho_S]]) - \\ & - i\tilde{\gamma}(t)([x_+, \{p_+, \rho_S\}] - [p_+, \{x_+, \rho_S\}]) \end{aligned} \quad (2.24)$$

siendo  $H_R = \frac{p_{\pm}^2}{2m\omega^2} + \frac{mx_{\pm}^2}{2}$  y  $H_S$  el de las ecuaciones 2.1 y 2.7.



## 2.3. Densidad espectral y renormalización

El efecto del entorno sobre el sistema queda completamente determinado si se especifica la densidad espectral  $J(\omega)$ , ecuación 2.16. En las simulaciones numéricas realizadas se consideraron densidades espectrales de la forma:

$$J(\omega) = \frac{2}{\pi} m \gamma_0 \omega \left( \frac{\omega}{\Lambda} \right)^{n-1} \theta(\Lambda - \omega) \quad (2.25)$$

Donde  $\theta(x)$  es la función escalón. Estas densidades espectrales describen un entorno formado por un conjunto infinito de osciladores con una distribución continua de frecuencias desde 0 hasta una frecuencia de corte  $\Lambda$  y donde la constantes de acoplamiento con el sistema son función de las frecuencias:

$$c^2(\omega) \propto \gamma_0 \omega^{n+1} \quad (2.26)$$

Para  $n = 1$  se dice que el entorno es *óhmico*, para  $n < 1$  *sub-óhmico* y para  $n > 1$  *súper-óhmico*. Para esta densidad espectral se puede calcular el límite asintótico de los coeficientes dependientes del tiempo que aparecen en la ecuaciones maestras. Por ejemplo para la renormalización en frecuencia se tiene:

$$\delta\Omega^2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \delta\Omega^2(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \delta\tilde{\Omega}^2(t) = -\frac{4}{\pi} \frac{\gamma_0 \Lambda}{n} \quad (2.27)$$

Es necesario tener en cuenta que estos coeficientes son los correspondientes a la ecuación maestra de un único oscilador interactuando con el entorno. En el caso de dos osciladores interactuando con el entorno mediante constantes de acoplamiento  $c_n$  el modo + interactúa con constantes efectivas  $\sqrt{2}c_n$ , como se ve de la ecuación 2.3. Esto implica que los valores asintóticos de los coeficientes de la ecuación maestra 2.24 son el doble de los anteriores.

La renormalización de los parámetros  $m_+$  y  $\omega_+$  se puede expresar, mediante las relaciones 2.8, como una renormalización de los parámetros  $m$ ,  $\omega$ ,  $c_{12}$  y  $\tilde{c}_{12}$  de los osciladores originales 1 y 2. Para acoplamiento en posición ( $\tilde{c}_{12} = 0$ ) sólo se renormaliza  $\omega$  y  $c_{12}$ :

$$\begin{aligned} \omega^2 &\rightarrow \Omega^2 = \omega^2 + \delta\Omega^2/2 \\ c_{12} &\rightarrow C_{12} = c_{12} + \delta\Omega^2/2 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Es importante remarcar que para las simulaciones numéricas y los cálculos analíticos se consideraron como parámetros físicos a los renormalizados. Por ejemplo, si se dice que se considera que los osciladores del sistema no interactúan entre sí se debe entender que  $C_{12} = 0$  y no que  $c_{12} = 0$ . Los parámetros ‘desnudos’ del sistema se eligen de forma tal que el comportamiento en el

límite asintótico sea el correspondiente a los parámetros renormalizados elegidos. Por ejemplo para  $C_{12} = 0$  deben realizarse los cálculos y simulaciones con una interacción entre 1 y 2 dada por  $c_{12} = -\delta\Omega^2/2 = \frac{4}{\pi}\gamma_0\Lambda$ .

Para acoplamiento simétrico la renormalización es la siguiente:

$$\begin{aligned} m \rightarrow M &= m \left(1 + \frac{\delta\Omega^2}{2\omega^2}\right)^{-1} & c_{12} \rightarrow C_{12} &= \left(c_{12} + \frac{\delta\Omega^2}{2}\right) \left(1 + \frac{\delta\Omega^2}{2\omega^2}\right) \\ \omega^2 \rightarrow \Omega^2 &= \omega^2 \left(1 + \frac{\delta\Omega^2}{2\omega^2}\right)^2 & \tilde{c}_{12} \rightarrow \tilde{C}_{12} &= \left(\tilde{c}_{12} + \frac{\delta\Omega^2}{2}\right) \left(1 + \frac{\delta\Omega^2}{2\omega^2}\right) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Siempre se trabajó en el caso en que los osciladores no interactúan, es decir con  $C_{12} = \tilde{C}_{12} = 0$ , por lo que se tiene  $M = m_-$  y  $\Omega = \omega_-$ .

### 2.3.1. Disipación y estado de equilibrio

También es importante discutir el límite asintótico del coeficiente disipativo  $\gamma(t)$ . Este límite se puede calcular fácilmente en la aproximación de acoplamiento débil. Por ejemplo para el caso en que el acoplamiento es en posición, a partir de la expresión para  $\gamma(t)$  en 2.14 se obtiene:

$$\gamma = \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = \gamma_0 \left(\frac{\omega}{\Lambda}\right)^{n-1} \quad (2.30)$$

Por lo tanto para entornos óhmicos  $\gamma = \gamma_0$ , independientemente de la frecuencia de corte. Para entornos sub-óhmicos ( $n < 1$ ) se tiene  $\gamma = \gamma_0 \left(\frac{\Lambda}{\omega}\right)^{1-n} > \gamma_0$ , que diverge para  $\Lambda \rightarrow +\infty$ . Es decir que los entornos sub-óhmicos son más disipativos que los entornos óhmicos. Esto se debe a que los osciladores más lentos, de menor frecuencia, están más acoplados con el sistema. En cambio, para entornos súper-óhmicos el límite es  $\gamma < \gamma_0$  y se anula para  $\Lambda \rightarrow +\infty$ . Es decir que los entornos súper-óhmicos son menos disipativos que los óhmicos y no lo son en absoluto cuando la frecuencia de corte es infinita. La principal consecuencia de esto es que, en ese límite, el sistema no alcanza un equilibrio con el entorno. Es decir, las derivadas en las ecuaciones 2.18 no se anulan para  $t \rightarrow \infty$ . Cuando la frecuencia de corte es finita lo que sucede es que el tiempo  $\gamma^{-1}$  que el sistema tarda en alcanzar el equilibrio, para los parámetros considerados, es mucho mayor que el tiempo característico del sistema  $2\pi\Omega^{-1}$  y que el tiempo hasta el cual es posible simular la evolución con los métodos utilizados (ver sección 2.5).

## 2.4. Estado asintótico general

Uno de los objetivos principales del trabajo es analizar cómo son las correlaciones entre los osciladores 1 y 2 una vez que alcanzaron el equilibrio con el entorno. Por lo tanto es necesario conocer cuál es el estado asintótico para el par de osciladores. Como se mencionó, las ecuaciones maestras de la sección anterior fueron derivadas bajo la condición de que el estado inicial global es de la forma  $\rho_{SE}(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_E(0)$  siendo  $\rho_E$  un estado térmico del entorno. Los estados térmicos son gaussianos<sup>3</sup> y por lo tanto si se elige  $\rho_S(0)$  gaussiano el estado global  $\rho_{SE}(0)$  también lo es. Por lo tanto el estado  $\rho_S(t)$  será gaussiano para todo  $t$  debido a la forma gaussiana del propagador que da la evolución del sistema, como se discutió en la sección 2.2.1. Una propiedad de los estados gaussianos, casi su definición, es que pueden ser determinados unívocamente a partir de los primeros y segundos momentos de los operadores  $x_i$  y  $p_i$ . Es decir que, dadas esas condiciones iniciales, para especificar completamente el estado del sistema en un tiempo arbitrario solo es necesario dar los valores medios:

$$\langle R_i \rangle = Tr(\rho_S R_i) \quad (2.31)$$

y la matriz de covarianza  $\sigma$ , cuyos elementos son:

$$\sigma_{ij} = Cov(R_i, R_j) = \frac{1}{2} \langle \{R_i, R_j\} \rangle - \langle R_i \rangle \langle R_j \rangle \quad (2.32)$$

donde  $R$  es un vector que agrupa los operadores de posición y momento de cada oscilador  $R = (x_1, p_1, x_2, p_2)$ . Si se elige el estado inicial  $\rho_S(0)$  de forma que los valores medios sean nulos<sup>4</sup>, entonces serán nulos para todo tiempo. Por lo tanto sólo es necesario especificar la matriz de covarianza cuyos elementos se reducen a  $\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \langle \{R_i, R_j\} \rangle$ . A partir de esta matriz podrá calcularse cualquier medida de correlaciones entre los osciladores 1 y 2, como por ejemplo la información mutua, el entrelazamiento o la discordia (ver capítulos 3, 4 y 5).

Se pueden encontrar las ecuaciones de evolución para los elementos de la matriz de covarianza a partir de la ecuación maestra y por lo tanto, de la misma forma que en la sección 2.2.1, los valores asintóticos. El cálculo detallado se encuentra en el apéndice A. Para cualquier estado inicial  $\rho_S(0)$ ,

---

<sup>3</sup>Debido a que los hamiltonianos considerados son cuadráticos en los operadores posición y momento o, equivalentemente, en los operadores de creación y destrucción.

<sup>4</sup>Con esta elección no se pierde generalidad en lo que respecta a las correlaciones.

la matriz de covarianza del estado asintótico para los modos  $+/-$  es:

$$\sigma_{\pm}(t) = \begin{pmatrix} (\Delta x_+)^2 & & & \\ & (\Delta p_+)^2 & & \\ & & a(t) & c(t) \\ & & c(t) & b(t) \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

El primer bloque de  $2 \times 2$  sobre la diagonal es la matriz de covarianza del modo  $+$  que, como se ve en las ecuaciones 2.19 y 2.23, no presenta correlaciones entre  $x_+$  y  $p_+$ . El segundo bloque de la diagonal es la matriz de covarianza del modo  $-$ , y corresponde a la evolución libre de una matriz de covarianza diagonal  $\begin{pmatrix} (\Delta x_-)^2 & \\ & (\Delta p_-)^2 \end{pmatrix}$ . Los coeficientes  $a(t)$ ,  $b(t)$  y  $c(t)$  son:

$$\begin{aligned} a(t) &= \cos^2(\omega_- t) (\Delta x_-)^2 + \sin^2(\omega_- t) \left( \frac{\Delta p_-}{m_- \omega_-} \right)^2 \\ b(t) &= (m_- \omega_- \Delta x_-)^2 \sin^2(\omega_- t) + (\Delta p_-)^2 \cos^2(\omega_- t) \\ c(t) &= \cos(\omega_- t) \sin(\omega_- t) \left( \frac{(\Delta p_-)^2}{m_- \omega_-} - m_- \omega_- (\Delta x_-)^2 \right) \end{aligned} \quad (2.34)$$

El bloque fuera de la diagonal es nulo, lo que indica que en el estado asintótico los modos  $+$  y  $-$  están descorrelacionados. Esto tiene sentido ya que el modo  $-$  evoluciona libremente mientras que el modo  $+$  es perturbado por el entorno, destruyendo todas las correlaciones que pudieran existir inicialmente. Las dispersiones  $\Delta x_+$  y  $\Delta p_+$  están completamente determinadas por los parámetros del entorno (ecuaciones 2.19 y 2.23). Por lo tanto, el único rastro del estado inicial existente en el estado asintótico se encuentra en la matriz de covarianza del modo  $-$  a través de las dispersiones  $\Delta x_-$  y  $\Delta p_-$ .

Realizando el cambio de base a los modos  $1/2$  se obtiene la siguiente matriz de covarianza:

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\gamma}^T & \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (\Delta x_+)^2 + a(t) & c(t) & (\Delta x_+)^2 - a(t) & -c(t) \\ c(t) & (\Delta p_+)^2 + b(t) & -c(t) & (\Delta p_+)^2 - b(t) \\ (\Delta x_+)^2 - a(t) & -c(t) & (\Delta x_+)^2 + a(t) & c(t) \\ -c(t) & (\Delta p_+)^2 - b(t) & c(t) & (\Delta p_+)^2 + b(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.35)$$

El primer bloque de  $2 \times 2$  sobre la diagonal,  $\boldsymbol{\alpha}$ , es la matriz de covarianza para el modo 1, mientras que  $\boldsymbol{\beta}$  es la matriz de covarianza para el modo 2 y  $\boldsymbol{\gamma}$  contiene las correlaciones entre los dos modos. Se tiene que  $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$ , es decir

que el estado es simétrico con respecto a los modos 1 y 2, lo cual es una consecuencia de que ambos interactúan de la misma forma con el entorno. Gran parte del trabajo realizado consistió en investigar las correlaciones cuánticas contenidas por un estado de este tipo en función de los parámetros del entorno como por ejemplo la temperatura y la densidad espectral, y de las condiciones iniciales del sistema.

## 2.5. Simulación numérica

Aquí se dan algunos detalles del método utilizado para obtener los resultados numéricos que se muestran en los capítulos 6. Si bien el interés principal es la dinámica del sistema, dejando de lado el entorno, el método utilizado consiste en resolver la evolución temporal conjunta del sistema y el entorno. Esto resulta sencillo si se considera que el entorno está formado por una cantidad finita  $N$  de osciladores armónicos, ya que todo lo que hay que hacer es resolver la evolución de un sistema de  $N + 2$  osciladores.

La densidad espectral 2.25 describe un entorno formado por infinitos osciladores con una distribución continua de frecuencias hasta una frecuencia de corte  $\Lambda$ . Para simular un entorno de este tipo con uno discreto se divide el continuo de osciladores en  $N$  ‘bandas’ de frecuencias de ancho  $\delta\omega = \Lambda/N$  y centradas en  $\omega_n = \frac{\delta\omega}{2} + n\delta\omega$  con  $n = 0, 1, 2 \dots N - 1$ , y se asocia cada banda con uno de los osciladores del entorno discreto. Las constantes de acoplamiento efectivas para cada banda se obtienen a partir de las ecuaciones 2.25 y 2.16 de la siguiente forma:

$$\frac{c_n^2}{2m_n\omega_n} = \int_{\omega_n - \delta\omega/2}^{\omega_n + \delta\omega/2} J(\omega) d\omega \quad (2.36)$$

El sistema de  $M = N + 2$  osciladores armónicos con interacciones lineales arbitrarias tanto en posición como en momento<sup>5</sup> tiene un hamiltoniano con la siguiente forma:

$$H = \frac{1}{2} (\bar{P}^T \mathbb{M}^{-1} \bar{P} + \bar{Q}^T \mathbb{V} \bar{Q}) \quad (2.37)$$

donde  $\bar{Q} = (q_1, q_2, \dots, q_M)$  y  $\bar{P} = (p_1, p_2, \dots, p_M)$  son vectores que agrupan las posiciones y momentos de todos los osciladores. Las matrices  $\mathbb{M}^{-1}$  y  $\mathbb{V}$  son matrices reales y simétricas que incluyen la información sobre las masas y frecuencias naturales de cada oscilador y las interacciones entre ellos. Existe una transformación de coordenadas  $\mathbb{A}$  que lleva a las coordenadas normales

<sup>5</sup>Aunque no se admiten interacciones entre posición y momento.

$\bar{\eta} = \mathbb{A}^{-1}\bar{Q}$  en función de las cuales el hamiltoniano es<sup>6</sup>:

$$H = \frac{1}{2} (\dot{\bar{\eta}}^T \dot{\bar{\eta}} + \bar{\eta}^T \mathbb{W} \bar{\eta}) \quad (2.38)$$

donde  $\mathbb{W}$  es una matriz diagonal que contiene el cuadrado de las frecuencias  $W_k$  de cada modo normal. Cada modo normal evoluciona independientemente y por lo tanto la matriz de covarianza de las coordenadas normales a tiempo  $t$  es:

$$\sigma'(t) = E(t)\sigma'(0)E(t)^T \quad (2.39)$$

donde  $\Sigma'(0)$  es la matriz de covarianza en el estado inicial y  $E(t)$  es la evolución libre:

$$E(t) = \bigoplus_{k=1}^M \begin{pmatrix} \cos(W_k t) & \frac{1}{W_k} \sin(W_k t) \\ -W_k \sin(W_k t) & \cos(W_k t) \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

La matriz de covarianza de las coordenadas originales  $\bar{Q}$  y  $\bar{P}$  se obtiene aplicando la transformación  $\mathbb{A}$ .

Esta forma de simular un entorno de infinitos osciladores mediante uno discreto fue utilizada en trabajos anteriores donde se verificó que los resultados obtenidos reproducen aquellos que se obtienen a partir de la evolución reducida para el sistema dada por la ecuación maestra exacta[7]. Este método tiene además la ventaja de que como también se resuelve la evolución del entorno es posible calcular las correlaciones entre el sistema y cada oscilador del entorno.

Su limitación principal es que sólo se puede simular la evolución hasta un tiempo de recurrencia de Poincaré del orden de  $T_P = 2\pi\delta\omega^{-1}$ , que sería infinito si el entorno estuviera formado por un continuo de osciladores. Por ejemplo para un entorno súper-óhmico formado por  $N = 300$  osciladores con parámetros  $n = 3$ ,  $\Lambda = 20$ ,  $\gamma_0 = 0,1$  y un sistema con frecuencia natural  $\Omega = 1$ , el tiempo de Poincaré es  $T_P \simeq \gamma^{-1}/30$ , siendo  $\gamma^{-1}$  el tiempo que tarda el sistema en alcanzar el equilibrio. Por lo tanto no es posible simular la evolución hasta que se alcanza el estado de equilibrio, para lo cual se necesitaría modelar el entorno con más de 9000 osciladores, lo que no resulta práctico debido al tamaño de las matrices involucradas.

Estos métodos fueron implementados en Python mediante los módulos SciPy y NumPy[16].

---

<sup>6</sup>Todas las magnitudes están adimensionalizadas

# Capítulo 3

## Elementos de teoría de la información

En este capítulo se presentan los elementos básicos de la teoría de la información, ya que estos son utilizados en la definición de la discordia. En primer lugar se darán las definiciones y propiedades más importantes para sistemas clásicos y luego se discutirá su generalización para sistemas cuánticos.

### 3.1. Sistemas clásicos

El elemento central de la teoría de la información es la entropía. Esta se puede interpretar como una medida de la incerteza asociada con una variable aleatoria o, en particular, con un sistema físico. Equivalentemente puede decirse que mide la cantidad de información que se gana, en promedio, al conocer el valor de la variable aleatoria. Existen muchas magnitudes entrópicas[17]. Aquí se utiliza la entropía de Shannon[18], que es la única que satisface ciertas propiedades importantes como la aditividad y subaditividad[17], y que además tiene una interpretación operacional clara como una medida de los recursos físicos necesarios para almacenar información[19].

#### 3.1.1. Entropía de Shannon

Dada una variable aleatoria  $X$  con una distribución de probabilidad  $p_x$  la entropía de Shannon es:

$$H(X) = H(\{p_x\}) = - \sum_x p_x \log(p_x) \quad (3.1)$$

donde se considera  $0 \log(0) = 0$ . Si se toma el logaritmo en base 2 entonces la entropía se expresa en bits. Sin embargo a lo largo de todo este informe

se utiliza el logaritmo natural. A partir de la definición se ve que  $H(X) \geq 0$ , valiendo la igualdad si y sólo si la variable  $X$  sólo toma un único valor. Además, puede probarse que  $H(X) \leq \log(d)$  si  $d$  es el número de posibles resultados de la variable  $X$ . El valor máximo  $\log(d)$  se alcanza sólo para la distribución uniforme  $p_x = \frac{1}{d}$ . Todas estas afirmaciones están en acuerdo con la interpretación de la entropía  $H(X)$  como una medida de la incerteza en la variable  $X$ .

La extensión para sistemas de varias variables es trivial. Por ejemplo, si se tienen dos variables  $X$  e  $Y$  con distribución conjunta  $p_{xy}$ , su entropía es:

$$H(X, Y) = - \sum_{x,y} p_{xy} \log(p_{xy}) \quad (3.2)$$

En este caso, una propiedad importante de la entropía de Shannon es la *subaditividad*:

$$H(X, Y) \leq H(X) + H(Y) \quad (3.3)$$

Donde  $H(X)$  y  $H(Y)$  son las entropías asociadas a la distribuciones  $p_x = \sum_y p_{xy}$  y  $p_y = \sum_x p_{xy}$ , respectivamente. Puede probarse que la igualdad vale si y sólo si las variables  $X$  e  $Y$  son independientes, es decir,  $p_{xy} = p_x p_y$ . Esta propiedad indica que la entropía de las variables  $X$  e  $Y$  siempre es mayor si son consideradas por separado, sin tener en cuenta las correlaciones entre ellas.

Otra propiedad importante, que resulta obvia para sistemas clásicos, es:

$$H(X) \leq H(X, Y) \quad (3.4)$$

que simplemente afirma que la incerteza total sobre dos variables  $X$  e  $Y$  no puede ser menor que la incerteza sobre solo una de ellas. Como se verá mas adelante, la entropía para sistemas cuánticos no cumple esta propiedad.

### 3.1.2. Entropía condicional

Para un sistema de dos variables  $X$  e  $Y$ , la entropía condicional de  $X$  dado que se conoce el valor de  $Y$  es:

$$H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y) \quad (3.5)$$

A la incerteza total sobre ambas variables se le descuenta la información que se gana al conocer  $Y$ . Lo que resta es la información que se ganaría al medir  $X$ , luego de haber medido  $Y$ . Como  $H(Y) \leq H(X, Y)$  se tiene que  $H(X|Y) \geq 0$ .



A partir de la subaditividad, ecuación 3.3, se deduce que  $H(X|Y) \leq H(X)$ , donde la igualdad vale sólo si  $X$  e  $Y$  son independientes. El significado es claro: si las variables no son independientes, sino que están correlacionadas, entonces al medir la variable  $Y$  se aprende algo sobre  $X$ , y por lo tanto la incerteza restante tiene que ser menor que la incerteza total de la variable  $X$ .

Usando las definiciones anteriores y el teorema de Bayes puede probarse que:

$$H(X|Y) = \sum_y p_y H(X|Y = y) \quad (3.6)$$

donde  $H(X|Y = y)$  es la entropía asociada a la distribución  $p_{x|y} = \frac{p_{xy}}{p_y}$ , que es la distribución de probabilidad de  $X$  condicional a un determinado resultado de  $Y$ . En esta forma se ve claramente que  $H(X|Y)$  es la entropía promedio de la variable  $X$  luego de medir  $Y$ .

### 3.1.3. Información mutua

Esta es la cantidad más importante para este trabajo. Es una medida de la información que tienen en común las variables  $X$  e  $Y$ , es decir una medida de sus correlaciones. Se define así:

$$\begin{aligned} H(X : Y) &= H(X) - H(X|Y) \\ &= H(Y) - H(Y|X) \\ &= H(X) + H(Y) - H(X, Y) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Donde se usó la definición de la entropía condicional. Como  $H(X|Y) \leq H(X)$  vale que  $H(X : Y) \geq 0$ , anulándose sólo si las variables son independientes.

Si las variables están completamente correlacionadas, esto es cuando  $Y$  es una función de  $X$ , entonces vale  $H(X, Y) = H(X) = H(Y)$  y por lo tanto  $H(X : Y) = H(X, Y)$ . Esto refleja el hecho de que  $X$  e  $Y$  comparten toda la información disponible. En general vale que  $H(X : Y) \leq \min\{H(X), H(Y)\}$ .

## 3.2. Sistemas cuánticos

La descripción de las propiedades estadísticas de un sistema cuántico está dada por la matriz densidad, en lugar de por una distribución de probabilidad como en sistemas clásicos. A partir de la matriz densidad se puede calcular las probabilidades para los posibles resultados de cualquier medición que se realice sobre el sistema. Si  $\rho$  es la matriz densidad que representa el estado del sistema y se realiza una medición representada por los operadores  $\{M_m\}$ , entonces:

$$p_m = \text{Tr}(M_m^\dagger \rho M_m) \quad (3.8)$$

es la probabilidad de obtener el resultado  $m$ . En principio, se puede utilizar la entropía de Shannon para cuantificar la incerteza que se tiene acerca del resultado de la medición:

$$H_{\{M_m\}}(\rho) = - \sum_m p_m \log(p_m) \quad (3.9)$$

Claramente esta cantidad depende no sólo del estado del sistema sino también de la medición que se realice. Se define como entropía del sistema al mínimo valor que toma 3.9 sobre todas las posibles mediciones  $\{M_m\}$ . Se puede probar que la medición que minimiza la entropía corresponde a medir en la base de autoestados del operador densidad[20]. Por lo tanto, para esa medición, las probabilidades  $p_m$  coinciden con los autovalores de la matriz densidad.

### 3.2.1. Entropía de Von Neumann

La discusión anterior lleva a la siguiente definición de la entropía para un estado cuántico  $\rho$ :

$$\begin{aligned} S(\rho) &= - \sum_n \lambda_n \log(\lambda_n) \\ &= -\text{Tr}(\rho \log(\rho)) \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde  $\{\lambda_n\}$  son los autovalores de la matriz densidad. Análogamente a la entropía de Shannon, se tiene  $0 \leq S(\rho) \leq \log(d)$  donde  $d$  es la dimensión del espacio de Hilbert. La entropía se anula sólo para estados puros y alcanza el valor máximo  $\log(d)$  sólo para el estado  $\rho = \mathbb{1}/d$ .

En sistemas bipartitos la entropía de Von Neumann también es *subaditiva*:

$$S(\rho) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B) \quad (3.11)$$

Donde  $\rho$  es la matriz densidad del sistema global, formado por dos subsistemas A y B cuyas matrices densidad son  $\rho_A = Tr_B(\rho)$  y  $\rho_B = Tr_A(\rho)$ , respectivamente. La igualdad en la propiedad anterior, la condición de *aditividad*, se satisface solamente para estados producto  $\rho = \rho_A \otimes \rho_B$ .

A diferencia de la entropía de Shannon, la entropía de Von Neumann no verifica que  $S(\rho_A) \leq S(\rho)$ . Es decir, *la incerteza sobre una parte de un sistema puede ser mayor que la incerteza total*. Para estados puros, esto sucederá si el estado global es entrelazado, como se discute en el capítulo siguiente. Una vez definida la entropía para un estado cuántico, las definiciones para la entropía condicional e información mutua se extienden trivialmente:

**Entropía condicional:**

$$S(A|B) = S(A, B) - S(B) \quad (3.12)$$

**Información mutua:**

$$\begin{aligned} S(A : B) &= S(A) - S(A|B) \\ &= S(B) - S(B|A) \\ &= S(A) + S(B) - S(A, B) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Donde por comodidad se utiliza la siguiente notación:

$$S(A, B) = S(\rho) \quad S(A) = S(\rho_A) \quad S(B) = S(\rho_B) \quad (3.14)$$

Una propiedad importante de la entropía es la concavidad, según la cual:

$$S\left(\sum_i p_i \rho_i\right) \geq \sum_i p_i S(\rho_i) \quad (3.15)$$

donde  $\{p_i\}$  es una distribución de probabilidad y  $\rho_i$  son distintos estados. Es decir esta propiedad expresa que al mezclar estadísticamente los estados  $\rho_i$  la entropía solo puede aumentar, con respecto al promedio de las entropías de los estados que interviene en la mezcla. La condición de igualdad sólo vale cuando todas las matrices  $\rho_i$  son las mismas. La entropía condicional también es cóncava en el estado global, es decir, si se considera un estado bipartito  $\rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_{AB}^i$  entonces:

$$S(A|B)_{\rho_{AB}} \geq \sum_i p_i S(A|B)_{\rho_{AB}^i} \quad (3.16)$$

# Capítulo 4

## Correlaciones Cuánticas

En este capítulo se desarrollan los conceptos que serán utilizados luego para cuantificar el grado de correlaciones no-clásicas entre las distintas partes de un sistema. Para comenzar, por claridad, se hará un breve repaso de la forma en que se representan los estados de un sistema compuesto, con énfasis en sistemas bipartitos. Luego se presentará el concepto de *entrelazamiento*, junto con una de las formas de detectarlo y cuantificarlo. Por último se tratará una medida de correlaciones más general, sobre la que se centra este trabajo: *la discordia cuántica*.

### 4.1. Sistemas cuánticos compuestos

Dado un sistema  $S$  formado por dos subsistemas  $A$  y  $B$ , se puede expresar el estado de  $S$  a partir de los posibles estados para  $A$  y  $B$ . Si  $\mathcal{H}_A$  es el espacio de Hilbert asociado a  $A$  y  $\mathcal{H}_B$  el asociado a  $B$ , entonces el espacio de Hilbert correspondiente a  $S$  es el producto tensorial  $\mathcal{H}_S = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ .

Cuando los subsistemas son preparados independientemente el estado global está representado por la matriz densidad  $\rho_S = \rho_A \otimes \rho_B$  donde  $\rho_A$  y  $\rho_B$  son las matrices densidad de cada subsistema. Los estados de este tipo se denominan ‘estados producto’ y para ellos los subsistemas  $A$  y  $B$  se encuentran descorrelacionados: la probabilidad de obtener un determinado resultado en una medición sobre  $A$  es independiente del resultado de cualquier medición sobre  $B$ .

Un estado global  $\rho_S$  se dice ‘separable’ si acepta la siguiente descomposición:

$$\rho_S = \sum_k p_k \rho_A^k \otimes \rho_B^k \quad (4.1)$$

donde  $\rho_A^k$  y  $\rho_B^k$  son posibles matrices densidad para los subsistemas  $A$  y  $B$ ,

y  $p_k$  son números reales positivos tales que  $\sum_k p_k = 1$ . Es decir, un estado global del sistema bipartito será separable si puede ser obtenido como una mezcla estadística de estados producto  $\rho_A^k \otimes \rho_B^k$ . En otras palabras, los estados separables son aquellos que pueden ser preparados mediante operaciones locales y comunicación clásica.

Resulta conveniente para familiarizarse con estos conceptos reducirlos al caso donde el estado global del sistema es puro, es decir, cuando  $\rho_S = |\phi_S\rangle\langle\phi_S|$ , para algún vector  $|\phi_S\rangle \in \mathcal{H}_S$ . En este caso el estado global será separable si y sólo si es un estado producto  $|\phi_S\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle = |a\rangle|b\rangle$ , con  $|a\rangle \in \mathcal{H}_A$  y  $|b\rangle \in \mathcal{H}_B$ . Sin embargo, no todo estado global se corresponde con un estado producto. Por ejemplo, si consideramos el siguiente estado global para un sistema de dos qubits:

$$|\phi_S\rangle = \frac{|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (4.2)$$

no existe ningún par de estados  $|a\rangle$  y  $|b\rangle$  para un qubit tal que  $|\phi_S\rangle = |a\rangle|b\rangle$ . Es decir, aunque el estado global es puro, no se puede asociar un estado puro a ninguno de los subsistemas. Solamente el par de qubits tiene un estado definido, en el cual los dos subsistemas se encuentran correlacionados: si se realiza una medición en la base  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  sobre alguno de los qubits se obtendrán ambos resultados con probabilidad  $1/2$ , pero si se obtiene 0 al medir el primer qubit, se obtiene 0 al medir el segundo y lo mismo ocurre si se obtiene 1.

A los estados que no son separables, es decir que no se pueden descomponer como en la ecuación 4.1, se los denomina ‘entrelazados’.

## 4.2. Entrelazamiento

A partir de la famosa paradoja EPR[21] y de las posteriores desigualdades de Bell[22] quedó en evidencia que el entrelazamiento, la posibilidad de que sistemas cuánticos estén en estados no separables, era una de las características más extrañas de la mecánica cuántica. Hoy en día, con el desarrollo de sistemas de comunicación cuántica y computación cuántica, el entrelazamiento se considera un recurso a partir del cual se pueden realizar tareas que no es posible realizar con sistemas clásicos. Por estas razones se ha dedicado mucho trabajo a investigar formas de caracterizar y medir el entrelazamiento, el grado de ‘no separabilidad’ de un estado cuántico. Aquí solo se presentan dos de estas formas.

### 4.2.1. Entropía de entrelazamiento

Esta cantidad sirve como una medida del entrelazamiento cuando el estado global del sistema es puro. Esta basada en el hecho de que cuánticamente la entropía de una parte del sistema puede ser mayor que la entropía global.

Si se considera un sistema  $S$ , formado por los subsistemas  $A$  y  $B$ , preparado en un estado puro  $|\phi_S\rangle$ , entonces por el teorema de descomposición de Schmidt se tiene:

$$|\phi_S\rangle = \sum_i^d \lambda_i |\phi_A^i\rangle |\phi_B^i\rangle \quad (4.3)$$

para ciertos estados  $|\phi_A^i\rangle$  y  $|\phi_B^i\rangle$  de los sistemas  $A$  y  $B$ , y ciertos coeficientes  $\lambda_i > 0$ . El número  $d$  se llama número de Schmidt y no puede ser mayor que las dimensiones de los espacios de Hilbert de  $A$  y  $B$ . A partir de esta descomposición de un estado puro se pueden obtener las matrices densidad de ambos subsistemas:

$$\rho_A = \sum_i \lambda_i^2 |\phi_A^i\rangle \langle \phi_A^i| \quad (4.4)$$

$$\rho_B = \sum_i \lambda_i^2 |\phi_B^i\rangle \langle \phi_B^i| \quad (4.5)$$

Se ve que los autovalores de la matrices densidad de ambos subsistemas son los mismos y coinciden con los coeficientes  $\lambda_i^2$ . Por lo tanto  $S(A) = S(B)$ .

Si el estado global, además de ser puro, es separable, entonces el número de Schmidt es 1 y los estados reducidos de  $A$  y  $B$  también son puros. En consecuencia  $S(A) = S(B) = 0$ . Si el estado no es separable entonces el número de Schmidt será mayor que 1 y  $S(A) = S(B) > 0$ . Por lo tanto es razonable tomar esta entropía como medida de no-separabilidad. Así, se define la entropía de entrelazamiento como:

$$E(|\phi_S\rangle) = S(\rho_A) = S(\rho_B) = - \sum_i \lambda_i^2 \log(\lambda_i^2) \quad (4.6)$$

Notar que como la entropía del sistema conjunto  $S(A, B)$  es nula pues el estado global es puro, la entropía condicional es  $S(A|B) = S(A, B) - S(B) = -S(B) \leq 0$ . Es decir, los estados puros entrelazados tienen entropía condicional negativa, lo cual es imposible en sistemas clásicos.

### 4.2.2. Criterio Peres-Horodecki

Este criterio, introducido por Peres en 1996[23], consiste en una condición necesaria para la separabilidad del estado de un sistema bipartito y a

diferencia de la entropía de entrelazamiento no está restringido a estados puros.

Su derivación es sencilla. Si el estado de un sistema bipartito S es separable entonces su matriz densidad acepta la descomposición 4.1:

$$\rho_S = \sum_k p_k \rho_A^k \otimes \rho_B^k \quad (4.7)$$

Se considera la matriz  $\rho_S^{TB}$  que resulta de transponer parcialmente la matriz anterior, con respecto a alguno de los subsistemas.

$$\rho_S^{TB} = \sum_k p_k \rho_A^k \otimes (\rho_B^k)^T \quad (4.8)$$

En este caso la transposición parcial es con respecto al subsistema B. Como las matrices  $\rho_B^k$  son matrices hermíticas positivas y de traza 1, la matrices  $(\rho_B^k)^T$  también lo son. En consecuencia la matriz  $\rho_S^{TB}$  es una matriz densidad válida para el sistema S y en consecuencia todos sus autovalores deben ser positivos.

Por lo tanto el criterio para detectar entrelazamiento es el siguiente. Si se tiene una matriz densidad arbitraria  $\rho$  cuyos elementos en una base de estados producto  $\{|q_A\rangle|\alpha_B\rangle\}$  son  $\rho_{m\mu,n\nu}$ , se considera la matriz  $\rho^{TB}$  cuyos elementos son:

$$\rho_{m\mu,n\nu}^{TB} = \rho_{m\nu,n\mu} \quad (4.9)$$

es decir la transposición parcial de  $\rho$  con respecto al subsistema B. Si los autovalores de esta nueva matriz no son todos positivos, entonces el estado descrito por  $\rho$  es entrelazado.

En principio la condición de separabilidad es sólo necesaria, no suficiente: si el estado es separable entonces la matriz transpuesta parcial tiene todos sus autovalores positivos, pero en general la implicación inversa no es cierta. Sin embargo, en el caso de sistemas bipartitos cuya dimensión es  $2 \times 2$  y  $2 \times 3$  se puede probar que la condición de separabilidad es necesaria y suficiente. Además, esta condición también resulta suficiente para la familia de estados Gaussianos de dos modos bosónicos[24], por lo que es relevante en este trabajo.

### 4.2.3. Negatividad logarítmica

La *negatividad logarítmica* es una medida de entrelazamiento basada en el criterio anterior. Cuantifica cuán negativo es el espectro de autovalores de la matriz densidad ante la transposición parcial. Se define como:

$$E_N(\rho) = \log(\|\rho^{TB}\|) \quad (4.10)$$

donde  $\|\sigma\| = \text{Tr}(\sqrt{\sigma^\dagger\sigma}) = \sum_n |\lambda_n|$ , siendo  $\lambda_n$  los autovalores de  $\sigma$ . Si todos los autovalores de  $\rho^{T_B}$  son positivos entonces  $\|\rho^{T_B}\| = 1$  y  $E_N(\rho) = 0$ , pero si uno o más autovalores son negativos entonces  $E_N(\rho) = \log(1 + 2 \sum_i |\tilde{\lambda}_i|)$  donde la suma es sobre todos los autovalores negativos de  $\rho^{T_B}$ . Se puede probar que la negatividad logarítmica es una función monótona del entrelazamiento, es decir que verifica ciertos postulados básicos relacionados con las propiedades de estados no separables[25].

### 4.3. Discordia

Hasta hace pocos años atrás se consideraba que los estados separables presentaban correlaciones totalmente clásicas, en el sentido de que podían ser preparados mediante operaciones locales y comunicación clásica (LOCC) entre las distintas partes[25]. Esta idea estaba sostenida por el hecho de que los modelos de computación cuántica desarrollados usaban estados entrelazados para poder realizar tareas que era imposible realizar clásicamente de forma eficiente[4]. Sin embargo, también se desarrollaron otros modelos de computación cuántica en los que no se utilizaban estados entrelazados y que, si bien eran menos poderosos que los anteriores para ciertas tareas, también podían resolver eficientemente problemas para los que no se conocían algoritmos clásicos eficientes[5, 26]. Esto llevó a la idea de que los estados separables debían contener algún tipo de correlaciones no-clásicas.

En el año 2001 Ollivier y Zurek, simultánea e independientemente con Henderson y Vedral, definieron una nueva medida de las correlaciones no-clásicas existentes en un sistema cuántico[1, 27]. Esta medida se llamó ‘discordia’ y se mostró que efectivamente para estados separables la discordia no era necesariamente nula. Es decir, *estados separables, no entrelazados, pueden contener correlaciones cuánticas*. En otras palabras, *la separabilidad de un estado no implica clasicidad*. A continuación se explica la definición de la discordia y más adelante se discuten sus propiedades.

#### 4.3.1. Definición

El plan para la definición de la discordia es sencillo. Dado el estado de un sistema bipartito, si se tiene: (a) una medida de las correlaciones *totales* existentes entre las partes del sistema y (b) una medida de las correlaciones ‘*clásicas*’, y si esas medidas son comparables, entonces se puede tomar como una medida de las correlaciones no-clásicas a la diferencia entre ellas. Con esta idea, si las correlaciones totales son  $I_T$  y las correlaciones clásicas son



$I_C$ , la discordia  $D$  sería:

$$D = I_T - I_C \quad (4.11)$$

A continuación se detalla como se calculan  $I_T$  e  $I_C$ .

### Correlaciones totales

Se considera un sistema bipartito  $S$ , constituido por los subsistemas  $A$  y  $B$ , preparado en un estado cuya matriz densidad es  $\rho_S$ . La información mutua definida a partir de la entropía de Von Neumann cuantifica las correlaciones *totales* existentes entre  $A$  y  $B$ :

$$\begin{aligned} I_T(A : B) &= S(A : B) = S(A) - S(A|B) \\ &= S(B) - S(B|A) \\ &= S(A) + S(B) - S(A, B) \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde se utiliza la notación del capítulo anterior, ecuación 3.14. Esta medida de correlaciones no distingue entre las que tienen un origen puramente cuántico, como las que ocurren en estados puros entrelazados, y las que ocurren por la simple mezcla estadística de estados producto.

### Correlaciones clásicas

Este punto no es tan directo como el anterior. Para empezar es necesario aclarar qué se entiende por correlaciones clásicas. Aquí se consideran correlaciones clásicas a las que pueden ser obtenidas por medio de *mediciones locales* sobre los subsistemas  $A$  y  $B$ .

Si se realiza una medición descrita por los proyectores  $M_m$  sobre uno de los subsistemas, por ejemplo el sistema  $B$ , la probabilidad de obtener el resultado  $m$  es:

$$p_m = \text{Tr}(\Pi_m^B \rho_S \Pi_m^B) \quad (4.13)$$

donde  $\Pi_m^B = \mathbb{1} \otimes M_m$ . El estado del sistema  $A$  luego de haber obtenido el resultado  $m$  en la medición sobre  $B$  es:

$$\rho_{A|m} = \frac{1}{p_m} \text{Tr}_B(\Pi_m^B \rho_S \Pi_m^B) \quad (4.14)$$

Entonces, en el espíritu de la ecuación 3.6, se puede definir la entropía condicional del subsistema  $A$ , dado que se realizó la medición  $\{M_m\}$  sobre  $B$ , como:

$$S(A|B)_{\{M_m\}} = \sum_m p_m S(\rho_{A|m}) \quad (4.15)$$

que es la entropía promedio sobre A luego de haber hecho la medición  $\{M_m\}$  sobre B. Esta magnitud depende de la medición  $\{M_m\}$  y en general es mayor a la entropía condicional  $S(A|B) = S(A, B) - S(B)$  ya que esta no está restringida a ninguna medición. Una vez definida una entropía condicional ‘local’, se define la información mutua correspondiente como:

$$I_C(A : B)_{\{M_m\}} = S(A) - S(A|B)_{\{M_m\}} \quad (4.16)$$

El subíndice C indica que esta información mutua sólo cuantifica aquellas correlaciones que se pueden obtener por medio de mediciones locales.

### Discordia

Como se adelantó, la discordia es la diferencia entre la información mutua total y la información mutua que se obtiene al realizar una medición sobre el subsistema B:

$$\vec{D}(A : B)_{\{M_m\}} = I_T(A : B) - I_C(A : B)_{\{M_m\}} \quad (4.17)$$

La flecha en  $\vec{D}$  indica que la medición es realizada sobre el sistema B. Utilizando las definiciones anteriores para  $I_C$  e  $I_T$  se obtiene:

$$\vec{D}(A : B)_{\{M_m\}} = S(B) - S(A, B) + S(A|B)_{\{M_m\}} \quad (4.18)$$

Claramente esta expresión depende no sólo del estado global  $\rho_s$  sino también de la medición  $\{M_m\}$ . Para obtener una cantidad que dependa solamente del estado del sistema se puede minimizar la discordia sobre todas las mediciones posibles  $\{M_m\}$ :

$$\vec{D}(A : B) = S(B) - S(A, B) + \min_{\{M_m\}} S(A|B)_{\{M_m\}} \quad (4.19)$$

Es decir considerar la medición que minimiza la incerteza de A, o en otras palabras, maximiza la información mutua  $I_C(A : B)_{\{M_m\}}$ . Esta última expresión es la que se utiliza en el resto del trabajo. A continuación se discuten las propiedades básicas de la discordia y su interpretación.

### 4.3.2. Propiedades

#### Positividad y asimetría

La discordia es siempre mayor o igual que cero. Esto resulta intuitivo si se asume que la información mutua tiene que decrecer al restringirse solamente

a mediciones locales. La demostración formal se muestra en el teorema 1 del apéndice B.

Por otro lado, es necesario resaltar que la discordia no es simétrica con respecto a los subsistemas, ya que las mediciones se realizan sobre sólo uno de ellos.

### Condiciones para discordia nula

Si se realiza la medición  $\{M_m\}$  sobre el subsistema  $B$ , y no se registra el resultado, el estado del sistema luego de la medición es:

$$\rho_S^M = \sum_m \Pi_m^B \rho_S \Pi_m^B \quad (4.20)$$

donde  $\Pi_m^B = \mathbb{1} \otimes M_m$  y  $\rho_S$  es el estado anterior a la medición. Puede probarse que la discordia se anula si y sólo si existe una medición  $\{M_m\}$  tal que:

$$\rho_S = \rho_S^M = \sum_m \Pi_m^B \rho_S \Pi_m^B \quad (4.21)$$

Es decir, para un estado  $\rho_S$  la discordia se anula si y sólo si existe una medición local tal que el estado no es perturbado por esa medición. En esas condiciones, toda la información común entre los dos subsistemas puede ser revelada mediante la medición  $\{M_m\}$  sobre B y mediciones sobre A condicionadas al resultado de la medición en B. Además, esto no modifica la matriz densidad para un observador que no está al tanto de las mediciones. Estas características del estado, la insensibilidad ante mediciones locales y la objetividad, pueden ser consideradas como requisitos básicos de clasicidad. Por lo tanto, *la discordia es una medida de las correlaciones contenidas en un estado que no pueden ser accedidas clásicamente, esto es, mediante mediciones locales y sin perturbar el estado del sistema.*

### Correlaciones cuánticas en estados separables

A partir de la propiedad anterior es fácil ver que en general los estados separables tienen discordia no nula. Si  $\rho_S$  es un estado separable:

$$\rho_S = \sum_k p_k \rho_A^k \otimes \rho_B^k \quad (4.22)$$

Según lo anterior la discordia  $\vec{D}(A : B)$  de este estado será nula si y sólo si existe alguna medición local sobre B que no lo perturbe. Sin embargo, esto

sucedirá únicamente si todas las matrices  $\rho_B^k$  que intervienen en la descomposición 4.22 son diagonales en una misma base. De otra forma el estado será modificado por cualquier medición sobre B. Quizás el ejemplo más sencillo de esta situación sea el de considerar un sistema de dos qubits en el siguiente estado:

$$\rho_S = \frac{1}{2} ( |0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| ) + \frac{1}{2} ( |+\rangle\langle +| \otimes |+\rangle\langle +| ) \quad (4.23)$$

donde  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  es una base ortogonal y  $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ . Este estado claramente puede ser preparado mediante operaciones locales y comunicación clásica: en el laboratorio A se prepara aleatoriamente el estado  $|0\rangle$  o el estado  $|+\rangle$ , con probabilidad  $1/2$  cada uno; mediante comunicación clásica se informa cuál estado fue preparado al laboratorio B, y en este laboratorio se prepara el mismo estado que en A. Por lo tanto no se trata de un estado entrelazado. Como los estados  $|0\rangle$  y  $|+\rangle$  no son ortogonales, no pueden ser distinguidos por ninguna medición y por lo tanto cualquier medición sobre A o sobre B perturba el estado del sistema. En consecuencia la discordia de este estado no es nula.

### Discordia para estados puros entrelazados

La discordia también tiene en cuenta las correlaciones debidas al entrelazamiento. Esto puede verse fácilmente para estados globales puros entrelazados  $|\phi_S\rangle$  a partir de la descomposición de Schmidt 4.3. Si se realiza una medición proyectiva  $\{M_m\}$  sobre B en una base que contenga los estados  $|\phi_B^i\rangle$ , entonces el estado del sistema A luego de la medición es puro, es decir que su entropía es cero. Por lo tanto la entropía condicional  $S(A|B)_{\{M_m\}}$  también es cero. Además  $S(A, B) = 0$  pues el estado global es puro. Por lo tanto se tiene que  $\vec{D}(A, B) = S(B) = E(|\phi_S\rangle)$ , es decir que la discordia se reduce a la entropía de entrelazamiento 4.6.

### Interpretación operacional y relación con otros problemas

Si bien la interpretación de la discordia como medida de las correlaciones cuánticas es clara, no resulta trivial identificar cómo esta nueva magnitud está relacionada con los recursos necesarios para realizar operaciones en las que se procesa información cuántica. Esta relación, es decir una interpretación operacional para la discordia, fue lograda muy recientemente por A. Winter *et ál* en [28], y también por Madhok y Datta en [29]. La operación en cuestión se trata del protocolo de ‘state merging’ (SM). Si se tiene un sistema formado por tres partes distantes A, B, y C en un estado puro  $|\Phi_{ABC}\rangle$ , el objetivo del protocolo es transmitir el estado  $\rho_A = Tr_{BC}(|\Phi_{ABC}\rangle\langle\Phi_{ABC}|)$  al lugar donde

se encuentra  $B$ . Esto significa obtener un estado  $|\Phi_{B'BC}\rangle$ , donde  $B'$  es un sistema auxiliar en el laboratorio donde se encuentra  $B$ , y que ese nuevo estado tenga alta fidelidad con el estado original  $|\Phi_{ABC}\rangle$ , es decir que sea prácticamente el mismo. En [30] se muestra que en el límite asintótico donde se dispone de  $n \rightarrow \infty$  copias del estado  $|\Phi_{ABC}\rangle$ , la cantidad mínima de qubits por copia que es necesario transmitir<sup>1</sup> para realizar esta tarea es justamente la entropía condicional  $S(A|B) = S(A, B) - S(B)$ . De forma similar, en [28] se muestra que la discordia  $\vec{D}(A : C)$  indica cuál es la cantidad de pares de Bell que es necesario utilizar en un protocolo SM extendido, donde además del costo en la transmisión de la información cuántica de  $A$  hacia  $B$  se considera el costo en la creación del estado inicial  $\rho_{AB} = Tr_C(|\Phi_{ABC}\rangle)$ . En [29] también se relaciona la discordia con el protocolo SM, aunque en un sentido diferente.

Otro resultado importante en cuanto a la aplicación de la discordia fue obtenido por Shabani y Lidar en [31]. En este trabajo se mostró que la evolución del estado de un sistema que interactúa con un entorno, ecuación 2.5, puede ser representada como un mapa completamente positivo si y sólo si es nula la discordia entre sistema y entorno en el estado inicial.

---

<sup>1</sup>O alternativamente la cantidad de pares de Bell, o ebits, que es necesario utilizar en un proceso de teleportación, donde además se utiliza comunicación clásica.

# Capítulo 5

## Estados Gaussianos

Como se discutió en el capítulo 2, en este análisis se utilizan estados gaussianos debido a que su descripción es simple y, para los hamiltonianos considerados, conservan su carácter gaussiano durante la evolución temporal. En este capítulo se describen sus propiedades y se detalla cómo se aplican en estos estados las medidas de correlaciones descriptas en el capítulo anterior.

### 5.1. Modos bosónicos

Se considera un sistema formado por  $N$  osciladores armónicos independientes, cuyo hamiltoniano es:

$$H = \sum_{k=1}^N H_k = \sum_{k=1}^N \hbar\omega_k \left( a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right) \quad (5.1)$$

donde  $\omega_k$  es la frecuencia de cada oscilador y  $a_k^\dagger$  y  $a_k$  son los operadores de creación y destrucción correspondientes. En el contexto de óptica cuántica cada oscilador representa un modo de oscilación del campo electromagnético, y el hamiltoniano anterior representa la energía de  $N$  de esos modos en el caso en el que no interactúan. Los operadores de posición y momento para cada oscilador son:

$$Q_k = \sqrt{\frac{\hbar}{2m_k\omega_k}} (a_k + a_k^\dagger) \quad P_k = -i\sqrt{\frac{\hbar m_k\omega_k}{2}} (a_k - a_k^\dagger) \quad (5.2)$$

donde  $m_k$  es la masa de cada oscilador. Como los operadores de creación y destrucción satisfacen las relaciones de conmutación bosónicas  $[a_k, a_l^\dagger] = \delta_{kl}$  y  $[a_k, a_l] = [a_k^\dagger, a_l^\dagger] = 0$  se tiene que  $[Q_k, P_l] = i\hbar\delta_{kl}$  y  $[Q_k, Q_l] = [P_k, P_l] = 0$ .

También se pueden definir los operadores adimensionales  $q_k$  y  $p_k$ :

$$\hat{q}_k = \frac{(a_k + a_k^\dagger)}{\sqrt{2}} \quad \hat{p}_k = -i \frac{(a_k - a_k^\dagger)}{\sqrt{2}} \quad (5.3)$$

que satisfacen  $[\hat{q}_k, \hat{p}_l] = i\delta_{kl}$ . En función de estos operadores el hamiltoniano de cada modo se escribe en la forma mas familiar:

$$H_k = \frac{1}{2m_k} P_k^2 + \frac{m_k \omega_k^2}{2} Q_k^2 = \frac{\hbar \omega_k}{2} (\hat{q}_k^2 + \hat{p}_k^2) \quad (5.4)$$

En el resto de este capítulo se utilizan unidades naturales ( $\hbar = 1$ ) y los operadores adimensionales  $\hat{q}_k$  y  $\hat{p}_k$ .

Si se agrupan los  $2N$  operadores en el vector  $R = (\hat{q}_1, \hat{p}_1, \hat{q}_2, \hat{p}_2, \dots, \hat{q}_N, \hat{p}_N)^T$  las relaciones de conmutación se pueden escribir como  $[R_k, R_l] = i\Omega_{kl}$  siendo  $\Omega$  la forma simpléctica:

$$\Omega = \bigoplus_{k=1}^N \Omega_k \quad \Omega_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

## 5.2. Representación en el espacio de fases

Si  $\rho$  es el estado de un solo modo, la función de Wigner para ese estado se define como[23]:

$$W(q, p) = \frac{1}{\pi} \int \langle q - r | \rho | q + r \rangle e^{2ipr} dr \quad (5.6)$$

Esta función tiene ciertas similitudes con una distribución de probabilidad sobre el espacio de fases definido por las coordenadas  $q$  y  $p$ . Por ejemplo  $W(q, p)$  es siempre real y su integral es 1. Además describe correctamente las distribuciones marginales para  $q$  y  $p$ :

$$\int W(q, p) dp = \langle q | \rho | q \rangle \quad \int W(q, p) dq = \langle p | \rho | p \rangle \quad (5.7)$$

Sin embargo, para ciertos estados la función de Wigner toma valores negativos, por lo que no puede interpretarse como una distribución de probabilidad. Aún así, es útil para describir cualitativamente cómo es el estado de un sistema desde el punto de vista del espacio de fases. Además da una descripción completa del estado, ya que la matriz densidad puede ser obtenida mediante la transformación inversa:

$$\langle q | \rho | q' \rangle = \int W \left( \frac{q + q'}{2}, p \right) e^{-ip(q' - q)} dp \quad (5.8)$$

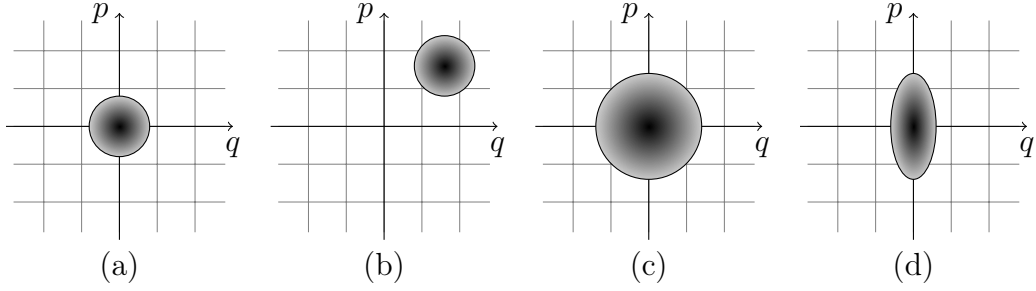


Figura 5.1: Algunos ejemplos de estados gaussianos para un solo modo. (a) estado fundamental, paquete de mínima incerteza centrado en el origen. (b) estado coherente, resulta de desplazar el estado fundamental. (c) estado térmico, centrado en el origen pero con una extensión mayor al fundamental. (d) estado estrujado en la coordenada  $q$ , la dispersión en  $q$  es menor que la dispersión en  $p$ .

La generalización para varios modos es trivial. La función de Wigner entonces permite describir un estado arbitrario de un sistema de  $N$  modos por medio de una función real de  $2N$  variables, en lugar de operadores que actúan sobre un espacio vectorial complejo de dimensión infinita.

Por definición, los estados gaussianos son aquellos cuya función de Wigner es gaussiana:

$$W(X) = \frac{1}{(2\pi)^N \sqrt{\det(\boldsymbol{\sigma})}} e^{-\frac{1}{2}(X-\xi)^T \boldsymbol{\sigma}^{-1}(X-\xi)} \quad (5.9)$$

donde  $X = (q_1, p_1, q_2, p_2, \dots, q_N, p_N)^T$  es el vector que agrupa las cuadraturas  $q$  y  $p$  de cada modo,  $\xi$  es el vector de valores medios:

$$\xi_k = \langle R_k \rangle = \text{Tr}(\rho R_k) \quad (5.10)$$

y  $\boldsymbol{\sigma}$  es la matriz de covarianza, cuyos elementos son:

$$\boldsymbol{\sigma}_{kl} = \langle \frac{1}{2}(R_k R_l + R_l R_k) \rangle - \langle R_k \rangle \langle R_l \rangle \quad (5.11)$$

Por lo tanto para determinar completamente un estado gaussiano sólo hace falta dar el valor medio de las cuadraturas y su matriz de covarianza. Gráficamente se pueden representar como un elipsoide en el espacio de fases. El vector  $\xi$  indica el centro del elipsoide y la matriz  $\boldsymbol{\sigma}$  determina la dirección de sus ejes principales (aquellos en que la matriz es diagonal) y la dispersión sobre cada uno de ellos. En la figura 5.1 se muestran algunos ejemplos para un solo modo.

A partir de esta definición se ve que para estados gaussianos la distribución de probabilidad marginal para cualquier conjunto de cuadraturas es



también gaussiana. De la ecuación 5.8 se sigue que la matriz densidad de un estado gaussiano es un operador con una dependencia gaussiana en los operadores  $\hat{q}_k$  o, equivalentemente, en los operadores  $a_k$  y  $a_k^\dagger$ .

El hecho de considerar solamente estados gaussianos es una simplificación muy importante: para especificar completamente un estado arbitrario de un único modo es necesario dar infinitos números complejos, sin embargo para caracterizar completamente un estado gaussiano solo hacen falta 6 números reales. A pesar de su simplicidad los estados gaussianos son muy relevantes. Los estados fundamentales y térmicos de hamiltonianos como los considerados en este trabajo (polinomios de  $2^{\text{do}}$  orden en los operadores  $\hat{q}_n$  y  $\hat{p}_n$ ) son gaussianos. Además estados gaussianos de 2 o más modos pueden presentar entrelazamiento y son utilizados experimentalmente para realizar tareas de información cuántica. A continuación se describen algunas de sus propiedades matemáticas.

## 5.3. Algunas propiedades

### 5.3.1. Principio de incerteza

No cualquier matriz de covarianza  $\sigma$  representa un estado cuántico válido. Para que esto suceda es necesario que la matriz densidad correspondiente sea un operador positivo y que las dispersiones en las distintas coordenadas satisfagan las restricciones dadas por las relaciones de conmutación entre los operadores  $\hat{q}_n$  y  $\hat{p}_n$ . Se puede probar que la positividad de la matriz densidad y las relaciones de conmutación implican que la matriz de covarianza debe ser tal que:

$$\sigma + \frac{i}{2}\Omega \geq 0 \quad (5.12)$$

donde  $\Omega$  es la matriz definida en 5.5. Esto se aplica a cualquier estado, no solo a los gaussianos. Para un estado de un modo descorrelacionado,  $\sigma = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix}$ , la condición anterior implica  $\nu_1\nu_2 \geq 1/4$ , el principio de incerteza de Heisenberg. Para un estado de un modo con correlaciones entre  $p$  y  $q$  la condición es  $\det(\sigma) \geq 1/4$ , por lo que la ecuación 5.12 es más completa que el principio de incerteza, ya que tiene en cuenta las correlaciones.

### 5.3.2. Desplazamientos

Estados coherentes como el de la figura 5.1(b) pueden ser obtenidos a partir del estado fundamental  $|0\rangle$  mediante la transformación unitaria:

$$W(\eta) = e^{\eta^* a_k - \eta a_k^\dagger} \quad (5.13)$$

Donde  $\eta$  es un número complejo. El operador  $W$  es el operador desplazamiento o de Weyl. En el espacio de fases esta transformación esta representada por un desplazamiento en los valores medios  $\langle \hat{q}_k \rangle \rightarrow \langle \hat{q}_k \rangle + \sqrt{2}Re(\eta)$  y  $\langle \hat{p}_k \rangle \rightarrow \langle \hat{p}_k \rangle + \sqrt{2}Im(\eta)$ . Como se explica en la sección 5.5, en un sistema compuesto las transformaciones unitarias locales no afectan las correlaciones entre los subsistemas. Como los valores medios siempre pueden ser llevados a cero mediante desplazamientos locales, toda la información sobre las correlaciones se encuentra contenida en la matriz de covarianza. Por lo tanto en lo que sigue se supone que los valores medios son nulos y solo se tiene en cuenta la matriz de covarianza de los estados.

### 5.3.3. Transformaciones simplécticas

Las transformaciones simplécticas son aquellas transformaciones lineales  $S$  que, actuando por congruencia sobre la forma simpléctica  $\Omega$ , la dejan invariante:

$$\Omega = S^T \Omega S \quad (5.14)$$

Se puede ver fácilmente que forman un grupo. Estas transformaciones son relevantes por que representan en el espacio de fases las transformaciones unitarias en el espacio de Hilbert generadas por polinomios de  $2^{do}$  orden en los operadores  $\hat{q}_n$  y  $\hat{p}_n$ , y estas son el tipo de transformaciones que transforman estados gaussianos en estados gaussianos. Es decir, si se aplica sobre el estado  $\rho$  una transformación unitaria  $U$  de ese tipo:

$$\rho \rightarrow \rho' = U \rho U^\dagger \quad (5.15)$$

entonces existe una matriz simpléctica  $S$  tal que los valores medios  $\xi'$  (ecuación 5.10) para el estado  $\rho'$  son:

$$\xi' = S \xi \quad (5.16)$$

siendo  $\xi$  los valores medios para el estado  $\rho$ . Por lo tanto si la matriz de covarianza correspondiente a  $\rho$  es  $\sigma$ , la nueva matriz de covarianza es:

$$\sigma' = S \sigma S^T \quad (5.17)$$

En la representación de Heisenberg la misma relación lineal 5.16 vale entre los vectores de operadores  $R'$  y  $R$ , y por lo tanto si el estado  $\rho$  es gaussiano  $\rho'$  también lo es.

Este mapeo entre transformaciones simplécticas en el espacio de fases y transformaciones unitarias en el espacio de Hilbert, llamada representación metapléctica, se demuestra en el apéndice C. Ejemplos importantes de transformaciones que preservan el carácter gaussiano son la evolución temporal y el estrujamiento:

## Evolución temporal

Para los hamiltonianos  $H$  considerados, el operador de evolución temporal  $U(t) = e^{-iHt}$  es una transformación unitaria como las consideradas en el párrafo anterior. Para un único modo, evolucionando según el hamiltoniano  $H_k = \frac{\omega_k}{2}(\hat{q}_k^2 + \hat{p}_k^2)$ , la transformación simpléctica correspondiente es:

$$E(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_k t) & \sin(\omega_k t) \\ -\sin(\omega_k t) & \cos(\omega_k t) \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

Es decir una rotación en el espacio de fases.

## Estrujamiento (squeezing)

Estados estrujados de un solo modo como los de la figura 5.1(d) pueden ser obtenidos a partir de estados térmicos (c) aplicando el siguiente operador:

$$U(r) = e^{\frac{r}{2}((a_k^\dagger)^2 - (a_k)^2)} \quad (5.19)$$

y su representación simpléctica es:

$$E(t) = \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

### 5.3.4. Diagonalización simpléctica. Invariantes.

Debido a que las matrices de covarianza son simétricas y reales es posible diagonalizarlas utilizando solamente transformaciones simplécticas. Dada cualquier matriz de covarianza  $\sigma$  de  $N$  modos, existe una transformación simpléctica  $S$  (que no es única) tal que:

$$\sigma = S^T \nu S \quad (5.21)$$

donde  $\nu$  es una matriz diagonal de la forma:

$$\nu = \bigoplus_{k=1}^N \begin{pmatrix} \nu_k & 0 \\ 0 & \nu_k \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

Esto está garantizado por el teorema de Williamson[7]. Se dice que la matriz  $S$  realiza una diagonalización simpléctica y los  $N$  números  $\{\nu_k\}$  son los autovalores simplécticos de  $\sigma$ . Estos pueden ser calculados como los autovalores usuales de la matriz  $|i\Omega\sigma|$ , como se muestra en el apéndice C. La condición 5.12 implica que  $\nu_k \geq 1/2 \forall k$ .

Una matriz de covarianza  $\begin{pmatrix} \nu_k & 0 \\ 0 & \nu_k \end{pmatrix}$  se corresponde a un estado térmico, cuya matriz densidad es:

$$\rho_k = \frac{2}{2\nu_k + 1} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{2\nu_k - 1}{2\nu_k + 1} \right)^n |n\rangle\langle n| \quad (5.23)$$

siendo  $\nu_k = \frac{1}{2} \coth\left(\frac{\omega_k}{2T}\right)$  la relación entre el autovalor simpléctico y la temperatura (la constante de Boltzmann es  $k_b = 1$ ). Por lo tanto el significado de la descomposición anterior es que cualquier estado gaussiano  $\rho$  puede ser alcanzado (a menos de desplazamientos) mediante operaciones simplécticas a partir de un estado térmico en donde los distintos modos están descorrelacionados y a distintas temperaturas:

$$\rho = U \left( \bigotimes_{k=1}^N \rho_k \right) U^\dagger \quad (5.24)$$

donde  $U$  es la transformación unitaria correspondiente a  $S$ .

Una matriz de covarianza general de  $N$  modos puede ser dividida en  $N^2$  bloques de  $2 \times 2$  de forma que cada bloque sea o bien la matriz de covarianza reducida de un solo modo o bien la matriz que contiene las correlaciones entre un par de modos. Se puede probar que ante transformaciones simplécticas globales la suma de los determinantes de los bloques es invariante y por lo tanto se puede calcular a partir de los autovalores simplécticos como:

$$\Delta(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{k=1}^N \nu_k^2 \quad (5.25)$$

Además, como el determinante de cualquier transformación simpléctica es 1, el determinante de  $\boldsymbol{\sigma}$ :

$$\det(\boldsymbol{\sigma}) = \prod_{k=1}^N \nu_k^2 \quad (5.26)$$

también es invariante.

### 5.3.5. Entropía

La entropía de un estado gaussiano general dado por la matriz densidad  $\rho$  es:

$$S(\rho) = S \left( U \left( \bigotimes_{k=1}^N \rho_k \right) U^\dagger \right) = S \left( \bigotimes_{k=1}^N \rho_k \right) \quad (5.27)$$

donde se usó la descomposición en estados térmicos 5.24 y el hecho de que como las transformaciones unitarias no cambian los autovalores de la matriz densidad, dejan la entropía global invariante. La entropía de estados productos es aditiva y por lo tanto:

$$S(\rho) = S\left(\bigotimes_{k=1}^N \rho_k\right) = \sum_{k=1}^N S(\rho_k) = \sum_{k=1}^N f(\nu_k) \quad (5.28)$$

donde  $f(\nu_k)$  es la entropía de un solo modo con autovalor simpléctico  $\nu_k$ :

$$f(x) = (x + 1/2) \log(x + 1/2) + (x - 1/2) \log(x - 1/2) \quad (5.29)$$

como puede calcularse fácilmente a partir de la matriz densidad 5.23.

## 5.4. Mediciones gaussianas y óptica cuántica

Si se realiza una medición sobre un estado gaussiano en general el estado luego de la medición no será gaussiano. Esto sucede por ejemplo si se mide en la base de estados de Fock, es decir si se hace conteo de fotones. En esta sección se estudian cuáles son los tipos de mediciones que mantienen invariante el carácter gaussiano de los estados. El conjunto completo de operaciones gaussianas, es decir todos aquellos procesos físicos que transforman estados gaussianos en estados gaussianos, incluyendo pero sin restringirse a mediciones, fue caracterizado en [32]. En términos de óptica cuántica estas son las operaciones que pueden ser implementadas mediante divisores de haz, láminas de onda, cristales con respuesta cuadrática, detección homodina y modos auxiliares preparados en estados gaussianos.

### 5.4.1. Detección homodina

Las mediciones gaussianas más sencillas corresponden a mediciones proyectivas en la base de autoestados de  $\hat{q}$  o  $\hat{p}$ , o de alguna cuadratura general  $\hat{q}'(\theta) = \cos(\phi)\hat{q} + \sin(\phi)\hat{p}$ . Esto es fácil de ver ya que si, por ejemplo, se mide el observable  $\hat{q}$ , el estado luego de la medición es un estado con posición definida, que puede ser obtenido como el límite de un estado gaussiano donde la dispersión en posición tiende a cero, es decir como un estado infinitamente estrujado. En óptica cuántica este tipo de mediciones pueden ser implementadas mediante la técnica de detección homodina balanceada[33]. En ese contexto cada oscilador armónico representa un único modo espacial del campo electromagnético. Por ejemplo cada una de las componentes del

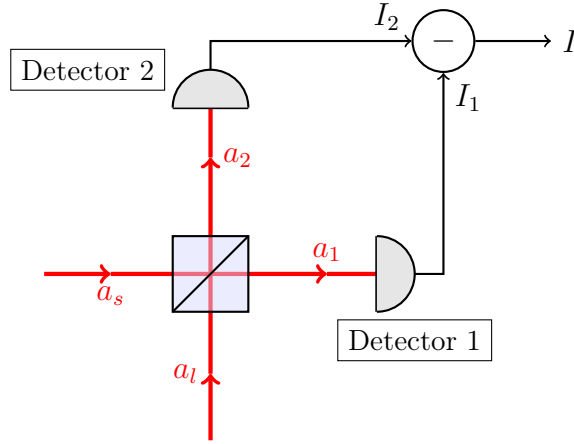


Figura 5.2: Esquema de la detección homodina balanceada. El modo que se desea medir es combinado con un ‘oscilador local’ de la misma frecuencia en un divisor de haz. Luego se mide la intensidad de los dos modos de salida.

campo eléctrico en un solo modo espacial se asocia con un operador de la forma:

$$\begin{aligned} \hat{E}(\bar{r}, t) &= \mathcal{E}_0 \left( a e^{i(\omega t - \bar{k} \cdot \bar{r})} + a^\dagger e^{-i(\omega t - \bar{k} \cdot \bar{r})} \right) \\ &= \sqrt{2} \mathcal{E}_0 \left( \hat{q} \cos(\omega t - \bar{k} \cdot \bar{r}) - \hat{p} \sin(\omega t - \bar{k} \cdot \bar{r}) \right) \end{aligned} \quad (5.30)$$

Donde  $a$  es el operador de destrucción asociado al campo. El campo eléctrico  $\hat{E}$ , es decir las cuadraturas  $\hat{q}$  y  $\hat{p}$ , no se pueden medir directamente ya que en general los detectores responden a la intensidad del campo, la cual está relacionada con el operador número de fotones  $N = a^\dagger a$ . La detección homodina balanceada es un método que permite medir una cuadratura arbitraria  $\hat{q}'(\theta)$  utilizando medidores de intensidad. Como se indica en la figura 5.2, el modo que se desea medir se combina con otro modo auxiliar en un divisor de haz. Este modo auxiliar se denomina ‘oscilador local’ y la medición es homodina si ambos tienen la misma frecuencia. Los operadores de destrucción correspondientes al modo que se desea medir y al oscilador local son  $a_s$  y  $a_l$ , respectivamente. Por lo tanto si se utiliza un divisor de haz 50:50 sin pérdidas de energía, los modos de salida del divisor están descriptos por los

operadores de destrucción<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_s + a_l) \\ a_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_s - a_l) \end{aligned} \quad (5.31)$$

Las intensidades registradas por los detectores,  $I_1$  e  $I_2$ , están representada por los operadores  $N_1 = a_1^\dagger a_1$  y  $N_2 = a_2^\dagger a_2$ , y por lo tanto la intensidad  $I = I_1 - I_2$  esta asociada con el operador:

$$n_- = a_s^\dagger a_l + a_l^\dagger a_s \quad (5.32)$$

Si el oscilador local se encuentra en un estado coherente  $|\beta\rangle$  con  $\beta = |\beta|e^{-i\theta}$ , y el estado global es  $\rho_{sl} = \rho_s \otimes |\beta\rangle\langle\beta|$ , entonces se puede ver que el valor medio de la señal  $I$  es:

$$\bar{I} = \sqrt{2}|\beta| \text{Tr}(\rho_s \hat{q}'(\theta)) = \sqrt{2}|\beta| \langle \hat{q}'(\theta) \rangle \quad (5.33)$$

Mientras que la dispersión, *en el límite en que el oscilador local es mucho mas intenso que el modo  $a_s$  ( $|\beta|^2 \gg \langle a^\dagger a \rangle$ )*, es:

$$(\Delta I)^2 = 2|\beta| \text{Tr}(\rho_s (\Delta \hat{q}'(\theta))^2) = 2|\beta|^2 \langle (\Delta \hat{q}'(\theta))^2 \rangle \quad (5.34)$$

Donde  $\Delta \hat{q}'(\theta) = \hat{q}'(\theta) - \langle \hat{q}'(\theta) \rangle$ . Por lo tanto el valor medio y la dispersión de la señal  $I$  son proporcionales al valor medio y la dispersión de una cuadratura arbitraria  $\hat{q}'(\theta)$ . Esta cuadratura se selecciona variando la fase  $\theta$  que el oscilador local mantiene con respecto al modo  $a_s$ . Es importante remarcar que estos resultados son válidos en el caso en que el oscilador local se encuentra en un estado coherente intenso, es decir que puede ser considerado clásico.

### 5.4.2. Medición simultánea de los valores medios de la posición y el momento

Como se explicó en la sección anterior, para realizar un medición sobre un modo del campo electromagnético es necesario combinarlo con otro modo auxiliar y realizar una medición sobre el sistema conjunto. En el límite en que el estado del modo auxiliar es ‘clásico’, esto es equivalente a realizar una medición proyectiva sobre el modo de interés. Sin embargo, en el caso más general donde no se restringe el estado de los modos auxiliares, una medición proyectiva sobre el estado global no es equivalente a un medición proyectiva sobre el modo original. Un ejemplo de esta situación es lo que en

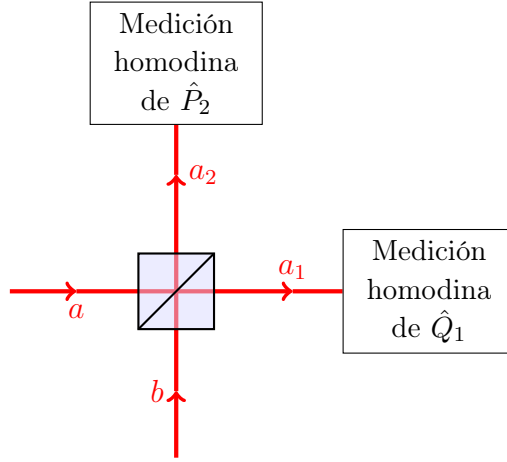


Figura 5.3: Esquema de la medición simultánea de  $\hat{Q}_1$  y  $\hat{P}_2$ . Se puede elegir el estado del modo b de forma tal que  $\langle \hat{Q}_1 \rangle = \langle q \rangle$  y  $\langle \hat{P}_2 \rangle = \langle p \rangle$ . Además como  $[\hat{Q}_1, \hat{P}_2] = 0$  estas mediciones pueden ser realizadas simultáneamente.

[33] llaman ‘medición simultánea de la posición y el momento’, que se resume a continuación.

Como se indica en la figura 5.3, se considera que el modo de interés, cuyo operador de destrucción es  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q} + i\hat{p})$ , es combinado en un divisor de haz con un modo auxiliar cuyo operador de destrucción es  $b = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{Q} + i\hat{P})$ , ambos de la misma frecuencia. Si el divisor de haz tiene coeficiente de transmisión  $t$  y de reflexión  $r$ , entonces los modos de salida del divisor de haz están descritos por los siguientes operadores de destrucción:

$$\begin{aligned} a_1 &= t a - r b = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( t \left( \hat{q} - \frac{r}{t} \hat{Q} \right) + i t \left( \hat{p} - \frac{r}{t} \hat{P} \right) \right) \\ a_2 &= r a + t b = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( r \left( \hat{q} + \frac{t}{r} \hat{Q} \right) + i r \left( \hat{p} + \frac{t}{r} \hat{P} \right) \right) \end{aligned} \quad (5.35)$$

Mediante la técnica de detección homodina puede medirse el observable  $\hat{Q}_1 = \left( \hat{q} - \frac{r}{t} \hat{Q} \right)$  sobre el modo  $a_1$  y el observable  $\hat{P}_2 = \left( \hat{p} + \frac{t}{r} \hat{P} \right)$  sobre el modo  $a_2$ . Además, como  $[\hat{Q}_1, \hat{P}_2] = 0$ , estas mediciones pueden ser realizadas simultáneamente. Por otra parte, si el modo  $b$  está en el estado fundamental, es decir  $\rho_b = |0_b\rangle\langle 0_b|$ , y el estado global es  $\rho_{ab} = \rho_a \otimes \rho_b$ , entonces se tiene

<sup>1</sup>La relación exacta entre  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_s$ ,  $a_l$  depende de las características del divisor de haz que se utilice.



que  $\langle Q_1 \rangle = \langle q \rangle$  y  $\langle P_1 \rangle = \langle p \rangle$ . Por lo tanto, combinando al modo  $a$  con un sistema auxiliar en el estado de vacío es posible medir *simultáneamente* dos observables cuyos valores medios coinciden con los valores medios de la posición y el momento de  $a$ .

En [33] se muestra que la densidad de probabilidad de obtener el resultado  $(Q_1, P_2)$  al medir los observables  $\hat{Q}_1$  y  $\hat{Q}_2$  es:

$$pr(Q_1, P_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W(q, p) W_0(q, p|Q_1, P_2, r/t) dqdp \quad (5.36)$$

Donde  $W(q, p)$  es la función de Wigner correspondiente al estado  $\rho_a$  y  $W_0(q, p|Q_1, P_2, r/t)$  es la función de Wigner correspondiente a un estado coherente centrado en  $q = Q_1$  y  $p = P_2$  con un estrujamiento en posición igual a  $\log(r/t)$ :

$$W_0(q, p|Q_1, P_2, r/t) = \frac{1}{\pi} \exp\left(-\frac{t^2}{r^2}(q - Q_1)^2 - \frac{r^2}{t^2}(p - P_2)^2\right) \quad (5.37)$$

Es decir, la distribución de probabilidad correspondiente a los distintos resultados en la medición simultánea de  $\hat{Q}_1$  y  $\hat{P}_2$  se obtiene como la convolución de la función de Wigner del modo  $a$  con la función de Wigner de un estado coherente estrujado. En términos de operadores esto se puede expresar de la siguiente manera:

$$pr(Q_1, P_2) = \frac{1}{2\pi} Tr(\rho_a W(\eta)|0, r/t\rangle\langle 0, r/t|W^\dagger(\eta)) \quad (5.38)$$

Donde  $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 + iP_2)$ ,  $W(\eta)$  es el operador de desplazamiento 5.13 y  $|0, r/t\rangle$  es el estado de vacío con estrujamiento  $\log(r/t)$  en posición. Es interesante ver que para  $r/t \rightarrow 0$  se recupera el caso de la sección anterior, ya que  $\hat{Q}_1 \rightarrow \hat{q}$  y la dispersión en  $\hat{P}_2$  tiende a infinito, es decir que la medición simultánea de  $\hat{Q}_1$  y  $\hat{P}_2$  equivale a la medición de  $\hat{q}$  sobre el modo  $a$ . Análogamente para  $r/t \rightarrow \infty$  el observable que se mide es  $\hat{p}$ .

La función  $pr(Q_1, P_2)$  coincide con la función de Husimi[33], que es una representación alternativa del estado  $\rho_a$  en el espacio de fases. Es decir que dada esta función es posible obtener la matriz densidad del estado. A diferencia de la función de Wigner, tiene la ventaja de que es siempre positiva, ya que corresponde a la distribución de probabilidad de los resultados de un experimento particular.

## Detección heterodina

La medición anterior también puede ser implementada con un método diferente, llamado detección heterodina. En este método el modo que se desea

medir también se combina en un divisor de haz con un oscilador local, con la diferencia que estos no tienen la misma frecuencia. Los detalles de este método se muestran en [34], donde además se analizan los puntos en común con la detección homodina.

En trabajos anteriores, donde se define la discordia para estados gaussianos, se denomina ‘homodinas’ a aquellas mediciones que corresponden a proyecciones sobre estados infinitamente estrujados, es decir a la determinación de alguna cuadratura  $\hat{q}'(\theta)$  [6, 35]. Las mediciones que corresponden a proyecciones sobre estados coherentes con estrujamiento finito se denominan ‘heterodinas’, aunque en rigor pueden ser implementadas tanto con detección homodina como con detección heterodina. En lo que sigue se utiliza la misma denominación.

### Estado post-medición. POVMs.

Para describir mediciones donde solo interesa conocer, dado el estado del sistema, cuáles son las probabilidades de obtener cada uno de los resultados se utilizan medidas sobre el conjunto de operadores positivos, o POVM por sus siglas en inglés. Un POVM consiste en un conjunto  $\{M_k\}$  de operadores semi-definidos positivos, donde cada elemento está asociado a uno de los posibles resultados de la medición. Si el estado del sistema es  $\rho$ , la probabilidad de obtener el resultado  $k$  es:

$$pr(k) = Tr(\rho M_k) \quad (5.39)$$

Para que la suma de las probabilidades sea 1 para cualquier estado  $\rho$  los elementos del POVM deben cumplir que:

$$\sum_k M_k = \mathbb{1} \quad (5.40)$$

La cantidad de elementos del POVM, es decir la cantidad de resultados posibles de la medición, no está limitada a la dimensión del espacio de Hilbert correspondiente a  $\rho$ , como si sucede en mediciones proyectivas. Esto es así por que en general un POVM corresponde a una medición sobre un sistema más amplio que resulta de extender al sistema original con uno auxiliar, como se muestra a continuación.

Dado un sistema A en un estado  $\rho_A$ , se considera una extensión con un sistema B de forma que el estado global sea  $\rho = \rho_A \otimes \rho_B$ . Si se realiza una medición proyectiva descrita por los proyectores  $\{P_k\}$  sobre el sistema global, la probabilidad de obtener el resultado  $k$  es:

$$p_k = Tr(\rho P_k) = Tr_A(Tr_B((\rho_A \otimes \rho_B)P_k)) \quad (5.41)$$

Donde  $Tr_A$  y  $Tr_B$  son las trazas parciales. Se puede ver que  $Tr_B((\rho_A \otimes \rho_B)P_k) = M_k\rho_A$ , donde  $M_k$  es un operador que depende del proyector  $P_k$  y del estado  $\rho_B$  del sistema auxiliar. Por lo tanto se puede expresar la probabilidad de obtener el resultado  $k$  en función del estado del sistema A como:

$$p_k = Tr(\rho_k M_k) \quad (5.42)$$

Además se puede ver que  $\sum_k M_k = \mathbb{1}$ . Los operadores  $\{M_k\}$  por lo tanto definen un POVM sobre el sistema A. El estado global luego de haber obtenido el resultado  $k$  en la medición es  $\rho_k = \frac{1}{p_k} P_k \rho P_k$  y por lo tanto el estado del sistema A es:

$$\rho_{A|k} = \frac{1}{p_k} Tr_B(P_k \rho P_k) = \frac{1}{p_k} Tr_B(P_k (\rho_A \otimes \rho_B) P_k) \quad (5.43)$$

Es decir que para conocer el estado del sistema A luego de la medición es necesario conocer los proyectores  $P_k$  y el estado  $\rho_B$ . Sin embargo, ni la extensión  $\rho_B$  ni la medición proyectiva  $\{P_k\}$  están completamente determinadas por el POVM  $\{M_k\}$ , es decir que no son únicas. Por esta razón no es posible determinar, dado solamente el POVM  $\{M_k\}$ , cuál es el estado del sistema A luego de haber obtenido un determinado resultado en la medición. A continuación se discute esta situación para el caso de la medición simultánea de  $\hat{Q}_1$  y  $\hat{P}_2$ .

En el ejemplo anterior la distribución de probabilidad de los posibles resultados  $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 + iP_2)$  se obtiene proyectando al estado  $\rho_a$  sobre los elementos de una familia de estados  $\{\rho_\eta\}$ , según la ecuación 5.38. En este caso la familia de estados es simplemente la que surge de los distintos desplazamientos del estado  $\rho_0 = |0, r/t\rangle\langle 0, r/t|$ . Si solo se conoce esta familia de estados, y no los detalles particulares del experimento, entonces en general no es posible saber cuál es el estado del sistema luego de haber obtenido un determinado resultado al realizar la medición. Esto se debe a que existen distintas implementaciones del experimento donde se miden los mismos operadores  $\hat{Q}_1$  y  $\hat{P}_2$  y que dan lugar a la misma distribución de probabilidad para los resultados. Por ejemplo, en lugar de usar un divisor de haz con coeficiente de transmisión  $t$ , coeficiente de reflexión  $r$ , y un modo auxiliar  $b$  en el estado fundamental, podría haberse usado un divisor de haz 50:50 y un modo auxiliar  $b$  en un estado fundamental con estrujamiento en posición igual a  $\log(r/t)$ . La distribución de probabilidad que se obtiene en ambos casos es la misma, pero el estado del modo  $a$  luego de la medición depende de cual haya sido el estado del modo  $b$  antes de la medición. Aún así, en cualquier caso el estado post-medición es gaussiano, con dispersión nula en las cuadraturas  $Q_1$  y  $P_2$ .

### 5.4.3. POVM Gaussiano y aplicación sobre sistemas bipartitos

La forma más general para los elementos de un POVM Gaussiano es la siguiente:

$$M(\eta) = \frac{1}{\pi} W(\eta) \rho_0 W^\dagger(\eta) \quad (5.44)$$

donde  $\rho_0$  es la matriz densidad de algún estado gaussiano,  $\eta$  es cualquier número complejo y  $W$  es el operador desplazamiento 5.13. Es decir que el POVM está completamente determinado por el estado  $\rho_0$ , ya que los elementos que lo conforman son todos los desplazamientos posibles de ese estado. La medición homodina de la posición corresponde al caso en que  $\rho_0 = |q\rangle\langle q|$ , donde  $|q\rangle$  es algún autoestado de  $\hat{q}$ . La medición simultanea de la posición y el momento corresponde al caso donde  $\rho_0 = |0\rangle\langle 0|$ , es decir donde  $\rho_0$  es el estado fundamental (posiblemente estrujado). Dado el estado  $\rho$ , la densidad de probabilidad de obtener el resultado correspondiente a  $\eta$  es:

$$pr(\eta) = Tr(\rho M(\eta)) \quad (5.45)$$

y la condición 5.40 en este caso es:

$$\frac{1}{\pi} \int W(\eta) \rho_0 W^\dagger(\eta) = \mathbb{1} \quad (5.46)$$

que se cumple siempre que  $\rho_0$  sea un estado válido pues  $\frac{1}{\pi} \int W(\eta) \rho_0 W^\dagger(\eta) = Tr(\rho_0) \mathbb{1}$ .

### POVM local en sistemas bipartitos

Como ya se dijo, la descripción de la medición dada por un POVM no es suficiente para conocer el estado del sistema luego de la medición. Sin embargo, si se tiene un sistema bipartito AB y se realiza una medición local dada por el POVM  $\{M_k\}$  sobre el sistema B, si puede conocerse el estado reducido del sistema A. Una forma de ver esto es considerar que el POVM se puede implementar como una medición proyectiva sobre la extensión del sistema AB con un sistema auxiliar C. Si el estado global es  $\rho = \rho_{AB} \otimes \rho_C$  y se realiza la medición proyectiva dada por los proyectores  $\{P_k\}$  sobre BC, entonces el estado de A luego de haber obtenido el resultado  $k$  es:

$$\begin{aligned} \rho_{A|k} &= \frac{1}{p_k} Tr_{BC}((\mathbb{1}_A \otimes P_k) \rho (\mathbb{1}_A \otimes P_k)) \\ &= \frac{1}{p_k} Tr_B(Tr_C((\rho_{AB} \otimes \rho_C)(\mathbb{1}_A \otimes P_k))) \end{aligned} \quad (5.47)$$

Pero, como antes, se puede ver que  $Tr_C((\rho_{AB} \otimes \rho_C)(\mathbb{1}_A \otimes P_k)) = \rho_{AB}(\mathbb{1}_A \otimes M_k)$ , donde  $M_k$  son los operadores que definen el POVM sobre el sistema B. Por lo tanto si  $\rho_{AB}$  es el estado anterior a la medición, el estado del sistema A luego de que se obtiene el resultado  $k$  es:

$$\rho_{A|k} = \frac{1}{p_k} Tr_B(\rho_{AB}(\mathbb{1} \otimes M_k)) \quad (5.48)$$

donde  $p_k$  es la probabilidad de obtener el resultado  $k$ :

$$p_k = Tr(\rho_{AB}(\mathbb{1} \otimes M_k)) \quad (5.49)$$

## 5.5. Estados gaussianos de 2 modos

En esta sección se dan las expresiones del entrelazamiento y la discordia para un estado gaussiano de dos modos. En primer lugar se establece la notación a utilizar. La matriz de covarianza para un estado de dos modos general es:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\gamma}^T & \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \quad (5.50)$$

donde  $\boldsymbol{\alpha}$  y  $\boldsymbol{\beta}$  son las matrices de covarianza para cada modo, y  $\boldsymbol{\gamma}$  contiene las correlaciones entre las coordenadas  $\{q_1, p_1\}$  y  $\{q_2, p_2\}$ . Para calcular las correlaciones entre los modos es útil considerar transformaciones unitarias gaussianas locales, ya que estas no afectan ni la entropía global ni las entropías de cada modo, y las cantidades invariantes ante tales transformaciones. Así, dos estados  $\rho_1$  y  $\rho_2$  de un sistema bipartito AB son localmente equivalentes si existe una transformación unitaria local  $U_l = U_A \otimes U_B$  tal que  $\rho_1 = U_l \rho_2 U_l^\dagger$ . Una transformación de este tipo esta representada en el espacio de fases por transformaciones simplécticas locales de la forma  $S_l = S_1 \oplus S_2$ . Por lo tanto la matriz de covarianza  $\boldsymbol{\sigma}$  transforma como:

$$\boldsymbol{\sigma} \rightarrow S_l \boldsymbol{\sigma} S_l^T = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\gamma}^T & \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1^T & 0 \\ 0 & S_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \boldsymbol{\alpha} S_1^T & S_1 \boldsymbol{\gamma} S_2^T \\ S_2^T \boldsymbol{\gamma}^T S_2 & S_2 \boldsymbol{\beta} S_2^T \end{pmatrix} \quad (5.51)$$

Entonces, como las transformaciones simplécticas tiene determinante 1, tanto el determinante global  $\det(\boldsymbol{\sigma})$  como los determinantes de cada bloque  $\det(\boldsymbol{\alpha})$ ,  $\det(\boldsymbol{\beta})$  y  $\det(\boldsymbol{\gamma})$  son invariantes simplécticos locales.

Se puede probar (ver Apéndice C) que para cualquier matriz  $\boldsymbol{\sigma}$  existe una transformación simpléctica local  $S_l$  que la lleva a una ‘forma estándar’

en que todos los bloques son diagonales:

$$S_l \boldsymbol{\sigma} S_l^T = \begin{pmatrix} a & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & a & 0 & c_2 \\ c_1 & 0 & b & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & b \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

Donde los coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c_1$  y  $c_2$  se pueden calcular fácilmente a partir de los invariantes simplécticos según las relaciones:

$$\det(\boldsymbol{\sigma}) = (ab - c_1^2)(ab - c_2^2) \quad \det(\boldsymbol{\alpha}) = a^2 \quad \det(\boldsymbol{\beta}) = b^2 \quad \det(\boldsymbol{\gamma}) = c_1 c_2 \quad (5.53)$$

En el caso de estados de dos modos, los 2 autovalores simplécticos  $\{\nu_-, \nu_+\}$  también puede expresarse fácilmente a partir de los invariantes globales:

$$\Delta(\boldsymbol{\sigma}) = \nu_-^2 + \nu_+^2 = \det(\boldsymbol{\alpha}) + \det(\boldsymbol{\beta}) + 2\det(\boldsymbol{\gamma}) \quad \det(\boldsymbol{\sigma}) = \nu_-^2 \nu_+^2 \quad (5.54)$$

de donde se puede despejar:

$$\nu_{\mp}^2 = \frac{\Delta(\boldsymbol{\sigma}) \mp \sqrt{\Delta(\boldsymbol{\sigma})^2 - 4\det(\boldsymbol{\sigma})}}{2} \quad (5.55)$$

La condición 5.12,  $v_- \geq 1/2$ , en función de los invariantes globales es:

$$\Delta(\boldsymbol{\sigma}) \leq \frac{1}{4} + 4\det(\boldsymbol{\sigma}) \quad (5.56)$$

### 5.5.1. Entrelazamiento

Para cuantificar el entrelazamiento se utiliza la negatividad logarítmica definida en la sección 4.2.3. Para calcularla en función de los invariantes simplécticos es necesario conocer como se representa en el espacio de fases la operación de transposición parcial de la matriz densidad. Para un solo modo, se puede ver a partir de la definición 5.6 de la función de Wigner que transponer la matriz densidad equivale a una reflexión en el espacio de fases sobre el eje  $p$ [24]:

$$\begin{array}{ccc} \rho & \implies & \rho^T \\ \downarrow & & \downarrow \\ W(q, p) & \implies & W(q, -p) \end{array} \quad (5.57)$$

y por lo tanto la matriz de covarianza transforma como:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ -c & b \end{pmatrix} \quad (5.58)$$

Análogamente, si  $\rho$  es un estado de dos modos y  $\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}$  su matriz de covarianza, la matriz de covarianza correspondiente a la transposición parcial  $\rho^{TB}$  es:

$$\boldsymbol{\sigma}' = V\boldsymbol{\sigma}V = V \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \mathbb{1}\boldsymbol{\gamma}\sigma_z \\ \sigma_z\boldsymbol{\gamma}^T\mathbb{1} & \sigma_z\boldsymbol{\beta}\sigma_z \end{pmatrix} \quad (5.59)$$

donde  $V = \mathbb{1} \oplus \sigma_z = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$ . Por lo tanto los invariantes locales son:  $\det(\boldsymbol{\alpha}') = \det(\boldsymbol{\alpha})$ ,  $\det(\boldsymbol{\beta}') = \det(\boldsymbol{\beta})$ ,  $\det(\boldsymbol{\gamma}') = -\det(\boldsymbol{\gamma})$  y  $\det(\boldsymbol{\sigma}') = \det(\boldsymbol{\sigma})$ . A partir de estas relaciones se pueden calcular los autovalores simplécticos  $\{\tilde{\nu}_-, \tilde{\nu}_+\}$  de  $\boldsymbol{\sigma}'$  según la ecuación 5.55. De acuerdo al criterio de Peres-Horodecki para que el estado  $\rho$  sea separable la matriz densidad  $\rho^{TB}$  debe ser definida positiva, y esto ocurre cuando  $\tilde{\nu}_- \geq 1/2$ . Utilizando la ecuación 5.56 para expresar esta condición se obtiene:

$$\Delta(\boldsymbol{\sigma}) - 4\det(\boldsymbol{\gamma}) \leq \frac{1}{4} + 4\det(\boldsymbol{\sigma}) \quad (5.60)$$

Y teniendo en cuenta la positividad de  $\rho$  se deduce que una condición necesaria para que el estado sea entrelazado es que  $\det(\boldsymbol{\gamma}) < 0$ . Por último, la negatividad logarítmica en función de los invariantes simplécticos es:

$$E_N(\rho) = \begin{cases} -\log(2\tilde{\nu}_-) & \text{si } \tilde{\nu}_- < 1/2, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5.61)$$

Para estados gaussianos de dos modos el criterio de Peres-Horodecki además de necesario es suficiente y por lo tanto el estado  $\rho$  sera separable si y solo si  $E_N(\rho) = 0$ .

### 5.5.2. Discordia

Como se ve de la ecuación 4.19, el cálculo de la discordia requiere una minimización sobre todas las mediciones posibles  $\{M_m\}$  sobre uno de los subsistemas:

$$\vec{D}(A : B) = S(B) - S(A, B) + \min_{\{M_m\}} S(A|B)_{\{M_m\}} \quad (5.62)$$

Esta minimización es la principal dificultad para evaluar la discordia tanto analítica como numéricamente. Para el caso de dos qubits, el caso más sencillo de sistema compuesto que se puede considerar, solo se puede obtener una expresión analítica de la discordia para determinadas familias de estados, pero no para estados generales [36, 37]. En este caso el cálculo numérico de la discordia es sencillo, ya que sólo son necesarios 3 números reales para caracterizar completamente una medición (proyectiva) sobre 1 qubit y por lo

tanto se puede realizar una optimización numérica sobre el espacio de estos 3 parámetros. Pero a medida que la dimensión de los espacios de Hilbert involucrados aumenta, la cantidad de parámetros libres crece rápidamente y una optimización numérica deja de ser eficiente. En el caso de interés para este trabajo, sistemas bipartitos de variables continuas, la dimensión del espacio de Hilbert es infinita, por lo que ninguna de las estrategias utilizadas en sistemas discretos para calcular la discordia analítica o numéricamente es útil.

El primer intento por atacar este problema fue de Adesso y Datta, que en el año 2010 presentaron, simultanea e independientemente con Giorda y Paris, una expresión analítica de la discordia para sistemas de variables continuas [35, 6]. Su trabajo contiene dos restricciones: solo se consideran estados gaussianos y, la más importante, la minimización de la discordia se lleva a cabo solo sobre el conjunto de mediciones gaussianas, es decir aquellas que preservan el carácter gaussiano de los estados. La medida de correlaciones resultante se denomina ‘discordia gaussiana’ y es la utilizada en este trabajo. A continuación se detallan los puntos más importantes de la derivación dada en [35].

### Discordia gaussiana

Utilizando la notación del capítulo anterior, se considera un estado gaussiano de dos modos A y B cuya matriz densidad es  $\rho_S$ . Si se realiza la medición descrita por el POVM Gaussiano  $\{M(\eta) = \frac{1}{\pi}W(\eta)\rho_0W^\dagger(\eta)\}$  sobre B, la densidad de probabilidad de obtener el resultado  $\eta$  es (ver sección 5.4.3):

$$p(\eta) = Tr(\rho_S\Pi_B(\eta)) \quad (5.63)$$

y el estado del subsistema A luego de haber obtenido el resultado  $\eta$  es:

$$\rho_{A|\eta} = \frac{1}{p(\eta)}Tr_B(\rho_S\Pi_B(\eta)) \quad (5.64)$$

Siendo  $\Pi_B(\eta) = \mathbb{1} \otimes M(\eta)$ . Una propiedad importante de este tipo de mediciones es que *la matriz de covarianza del sistema A luego de la medición no depende del resultado que se haya obtenido*. Si la matriz de covarianza del estado  $\rho$  tiene la forma 5.50,  $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma^T & \beta \end{pmatrix}$ , y la matriz de covarianza del estado  $\rho_0$  que define la medición es  $\beta_0$ , entonces la matriz de covarianza del estado  $\rho_{A|\eta}$  es:

$$\epsilon = \alpha - \gamma(\beta + \beta_0)^{-1}\gamma^T \quad (5.65)$$



La generalización de la expresión de la discordia para este tipo de mediciones es:

$$\vec{D}(A : B) = S(B) - S(A, B) + \min_{\rho^0} \int p(\eta) S(\rho_{A|\eta}) d^2\eta \quad (5.66)$$

Que surge simplemente de reemplazar la suma discreta de la entropía condicional 4.15 por la correspondiente integral. Como la matriz de covarianza  $\epsilon$  del estado  $\rho_{A|\eta}$  no depende de  $\eta$ , la entropía  $S(\rho_{A|\eta}) = S(\epsilon)$  tampoco lo hace y la integral anterior es trivial. Utilizando la ecuación 5.28 para la entropía de un estado gaussiano se tiene que  $S(B) = f(\sqrt{\det(\beta)})$  y  $S(A, B) = f(\nu_-) + f(\nu_+)$ . Por lo tanto:

$$\vec{D}(A : B) = f(\sqrt{\det(\beta)}) - f(\nu_-) - f(\nu_+) + \min_{\beta_0} f(\sqrt{\det(\epsilon)}) \quad (5.67)$$

donde  $\nu_{\pm}$  son los autovalores simplécticos de  $\sigma$ . La función  $f(x)$  es creciente para  $x > 1/2$  y por lo tanto para minimizar la discordia hay que minimizar  $\det(\epsilon)$  con respecto a todas las posibles matrices de covarianza de un modo  $\beta_0$ , que solo tienen 3 parámetros reales independientes. Todavía puede hacerse una simplificación adicional<sup>2</sup> y restringir la minimización a las matrices  $\beta_0$  correspondientes a estados puros, las cuales se pueden parametrizar solo con 2 parámetros:

$$\beta_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^T \quad (5.68)$$

Es decir como estados fundamentales con estrujamiento  $r = \log(\lambda)$  y rotados un ángulo  $\theta$ . La minimización con respecto a estos dos parámetros puede hacerse analíticamente y el resultado es el siguiente:

$$E_{min} = \min_{\beta_0} \det(\epsilon) = \begin{cases} \frac{AB - C^2 + D - \sqrt{C^4 + (-AB + D)^2 - 2C^2(AB + D)}}{2B} & \text{si } g > 0 \\ \frac{2C^2 + (-1/4 + B)(-A + 4D) + 2|C|\sqrt{C^2 + (-1/4 + B)(-A + 4D)}}{4(-1/4 + B)^2} & \text{si } g \leq 0, \end{cases} \quad (5.69)$$

con:

$$g = (D - AB)^2 - (1/4 + B)C^2(A + 4D) \quad (5.70)$$

siendo:

$$A = \det(\alpha) \quad B = \det(\beta) \quad C = \det(\gamma) \quad D = \det(\sigma) \quad (5.71)$$

<sup>2</sup>Se utiliza el hecho de que cualquier estado gaussiano admite una descomposición convexa en estados puros y que la entropía condicional  $S(\rho_{A|\eta})$  es cóncava con respecto a los elementos de la medición generalizada  $\Pi_B(\eta)$ .

El primer caso, para  $g > 0$ , corresponde al caso donde el mínimo en  $\det(\epsilon)$  se alcanza para  $\lambda = 0$ <sup>3</sup>, es decir que la medición que minimiza la discordia es una proyección sobre un estado infinitamente estrujado. Como se estableció en la sección 5.4, este tipo de mediciones se denominan homodinas e incluyen, por ejemplo, a las mediciones en la base de autoestados de los operadores  $\hat{q}$  o  $\hat{p}$ . El segundo caso, para  $g \leq 0$ , se corresponde con mediciones más generales para las cuales  $\lambda > 0$ , llamadas heterodinas. Una clase de estados importantes para los cuales la medición que minimiza la discordia siempre es heterodina son los estados térmicos estrujados.

### Algunas propiedades

- Todos los estados bipartitos correlacionados tienen discordia no nula. Es decir, la discordia gaussiana se anula si y solo si  $\gamma = 0$ .
- La discordia gaussiana se encuentra acotada para estados separables. En [6] se muestra que si  $\sigma$  es la matriz de covarianza de un estado separable entonces la discordia gaussiana verifica:

$$\vec{D}(\sigma) \leq (B - 1/2) \log \left( \frac{B + 1/2}{B - 1/2} \right) \leq 1 \quad (5.72)$$

donde  $B = \det(\beta)$ . La primera desigualdad es saturada por estados térmicos estrujados donde  $D = \det(\gamma)$  es máximo y la asimetría entre los dos modos también es máxima. La segunda desigualdad se satura para  $B \rightarrow \infty$ .

- A partir de la propiedad anterior se deduce que si la discordia es mayor que 1 entonces el estado es entrelazado.

## 5.6. Estados térmicos estrujados

En esta sección se considera una clase importante de estados gaussianos de dos modos, los estados térmicos estrujados. Estos estados se obtienen a partir de estados térmicos descorrelacionados mediante el operador de estrujamiento de dos modos:

$$S(r) = e^{-r(a_1^\dagger a_2^\dagger - a_1 a_2)} \quad (5.73)$$

---

<sup>3</sup> $\lambda = 0$  es equivalente a  $\lambda = \infty$  mediante una rotación en  $\pi/2$ .

donde  $a_i^\dagger$  y  $a_i$  son los operadores de creación y destrucción, y  $r$  es el estrujamiento<sup>4</sup>. La representación simpléctica para esta transformación es:

$$S(r) = \begin{pmatrix} \cosh(r) & 0 & -\sinh(r) & 0 \\ 0 & \cosh(r) & 0 & \sinh(r) \\ -\sinh(r) & 0 & \cosh(r) & 0 \\ 0 & \sinh(r) & 0 & \cosh(r) \end{pmatrix} \quad (5.74)$$

En términos de las coordenadas de los modos  $+$  y  $-$ ,  $q_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1 \pm q_2)$  y  $p_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 \pm p_2)$ , esta transformación resulta equivalente a un estrujamiento  $U(-r)$  para el modo  $+$  y un estrujamiento  $U(r)$  para el modo  $-$ , donde  $U$  es el estrujamiento de 1 modo 5.19. De esta manera  $\frac{\Delta p_+}{\Delta x_+} = \frac{\Delta x_-}{\Delta p_-} = e^{2r}$ . Por lo tanto para  $r \rightarrow -\infty$  se obtiene un autoestado de los operadores  $p_+$  y  $x_-$ , es decir un estado EPR ideal.

Al aplicarse esta transformación a estados térmicos descorrelacionados, cuyas matrices de covarianza son de la forma  $\sigma_0 = \begin{pmatrix} \nu_1 \mathbb{1} & \\ & \nu_2 \mathbb{1} \end{pmatrix}$ , se obtienen estados térmicos estrujados, los cuales se denominan STS por sus siglas en ingles. La matriz de covarianza resultante se muestra en el apéndice C. Este tipo de estados pueden presentar correlaciones cuánticas. El estado asintótico 2.35, sobre el cual se centra gran parte del trabajo, en algunos casos relevantes guarda cierta similitud con estados STS. Además estos son utilizados como estados iniciales para el sistema de dos osciladores de los modelos presentados en el capítulo 2. Por estas razones es útil estudiar cuáles son las correlaciones cuánticas presentes en este tipo de estados. Esto resulta sencillo en el caso de estados STS puros, es decir cuando  $\nu_1 = \nu_2 = 1/2$ . En ese caso se puede ver que la negatividad logarítmica es  $E_N = 2r$ . La discordia gaussiana es  $D = f(\cosh(2r))$ , donde  $f$  está dada por la ecuación 5.28, que para grandes valores de  $r$  es  $D \simeq 2r + 2 \log(2)$ . El estrujamiento de los modos  $+$  y  $-$  resulta entonces un recurso mediante el cual es posible generar correlaciones cuánticas entre las coordenadas de los modos 1 y 2.

---

<sup>4</sup>Por simplicidad se considera que  $r$  es un número real. Si tiene componente imaginaria entonces además del estrujamiento la transformación genera una rotación.

# Capítulo 6

## Resultados: dinámica de las correlaciones del sistema

Teniendo en cuenta el modelo presentado en el capítulo 2, se analizan las correlaciones entre los dos osciladores del sistema durante su interacción con el entorno. En primer lugar, en las secciones 6.1, 6.2 y 6.3 se analizan solo las correlaciones presentes en el estado asintótico en función de los parámetros importantes del entorno y del estado inicial del sistema. Luego, en la sección 6.4, se estudia como es la evolución temporal de las correlaciones hasta que se alcanza el estado asintótico.

### 6.1. Correlaciones en el estado asintótico

En esta sección el interés es analizar las correlaciones entre los osciladores 1 y 2 que conforman al sistema en el estado asintótico, es decir luego de que ya fue alcanzado el equilibrio con el entorno. Este estado es gaussiano y la matriz de covarianza correspondiente se obtuvo en la sección 2.4. Como se discutió en la sección 5.5, para calcular cualquier medida de correlaciones solo es necesario conocer los invariantes simplécticos locales de la matriz de covarianza, es decir su determinante y los determinantes de cada bloque de  $2 \times 2$ . A partir de las expresiones 2.35 y 2.34 se pueden obtener las siguientes formas compactas para los invariantes.

$$\begin{aligned} A = B = \det(\boldsymbol{\alpha}) &= \frac{1}{4} (\phi_+^2 + \phi_-^2 + 2\phi_+\phi_-f(t, r, r_{crit})) \\ C = \det(\boldsymbol{\gamma}) &= \frac{1}{4} (\phi_+^2 + \phi_-^2 - 2\phi_+\phi_-f(t, r, r_{crit})) \\ D = \det(\boldsymbol{\sigma}) &= \phi_+^2\phi_-^2 \end{aligned} \tag{6.1}$$

donde  $f(t, r, r_{crit})$  es una función que contiene toda la dependencia temporal:

$$f(t, r, r_{crit}) = \cos^2(\omega_- t) \cosh(2(r_{crit} - r)) + \sin^2(\omega_- t) \cosh(2(r_{crit} + r)) \quad (6.2)$$

Las constantes  $r$  y  $r_{crit}$  miden el estrujamiento en los modos  $+$  y  $-$ :

$$r_{crit} = \frac{1}{2} \log \left( m_- \omega_- \frac{\Delta x_+}{\Delta p_+} \right) \quad r = \frac{1}{2} \log \left( m_- \omega_- \frac{\Delta x_-}{\Delta p_-} \right) \quad (6.3)$$

,mientras que  $\phi_+$  y  $\phi_-$  son:

$$\phi_+ = \Delta x_+ \Delta p_+ \quad \phi_- = \Delta x_- \Delta p_- \quad (6.4)$$

Claramente  $\phi_+$  y  $\phi_-$  están relacionados con las entropías de los modos  $+$  y  $-$ , respectivamente. Los parámetros  $\phi_+$  y  $r_{crit}$  están completamente determinados por el entorno y pueden ser expresados en función de los coeficientes de disipación y difusión según las ecuaciones 2.19 o 2.23. Los coeficientes difusivos dependen a su vez de la temperatura del entorno. En cambio los parámetros  $\phi_-$  y  $r$  están determinados por las dispersiones del modo  $-$ , que provienen del estado inicial ya que este modo evoluciona libremente.

Como se dijo en el capítulo 2 el estado inicial es un estado donde sistema y entorno están descorrelacionados, y el entorno está en un estado térmico a temperatura  $T$ . Para obtener los resultados numéricos que se presentan en las siguientes secciones es necesario conocer como dependen  $\phi_+$  y  $r_{crit}$  de la temperatura del entorno<sup>1</sup>. Esta dependencia se obtuvo mediante las simulaciones descritas en la sección 2.5 con un entorno formado por  $N = 300$  osciladores.

Tanto la negatividad logarítmica como la discordia pueden ser evaluadas a partir de estas expresiones. A continuación se resumen los resultados obtenidos por Augusto Roncaglia en [7], donde se caracterizó completamente el comportamiento del entrelazamiento en el estado asintótico. Luego se presentan los resultados obtenidos durante el desarrollo esta tesis, es decir, la caracterización de la discordia.

## 6.2. Resultados conocidos sobre el entrelazamiento

Usando los métodos del capítulo 5 se puede calcular la negatividad logarítmica  $E_N$  para el estado asintótico a partir de las expresiones anteriores. El resultado es el siguiente:

$$E_N(t) = \max\{0, \tilde{E}_N + \Delta E_N G(t)\} \quad (6.5)$$

---

<sup>1</sup>O equivalentemente, como es la dependencia entre  $\Delta x_+$  y  $\Delta p_+$  con la temperatura.

donde  $G(t)$  es una función con período  $\frac{\pi}{\omega_-}$  y cuya imagen es el intervalo  $[-1, 1]$ . El valor medio  $\tilde{E}_N$  es:

$$\tilde{E}_N = \text{máx}\{|r|, |r_{crit}|\} - S_{crit} \quad (6.6)$$

donde  $S_{crit} = \frac{1}{2} \log(4\Delta x_+ \Delta p_+ \Delta x_- \Delta p_-)$ . La amplitud de las oscilaciones es:

$$\Delta E_N = \text{mín}\{|r|, |r_{crit}|\} \quad (6.7)$$

A partir de este resultados se pueden identificar tres comportamientos o ‘fases’ diferentes. Cuando  $\tilde{E}_N \leq -\Delta E_N$  se tiene que  $E_N(t) \leq 0 \forall t$  y por lo tanto el estado asintótico no se encuentra entrelazado. Esta fase se denomina SD en referencia a la muerte súbita (Sudden Death) del entrelazamiento. En cambio, si  $\tilde{E}_N > \Delta E_N$  se tiene que  $E_N(t) > 0 \forall t$  y por lo tanto el estado se encuentra entrelazado, aunque el grado de entrelazamiento puede oscilar en el tiempo. Esta fase se denomina NSD (No Sudden Death). Existe una situación intermedia, cuando  $-\Delta E_N < \tilde{E}_N \leq \Delta E_N$ , en la que el entrelazamiento aparece y desaparece con un período de  $\frac{\pi}{\omega_-}$ . Esta fase se denomina SDR (Sudden Death and Revivals).

A partir de las expresiones analíticas para los coeficientes  $D$ ,  $f$  y  $\gamma$  puede calcularse la relación entre  $S_{crit}$  y  $r_{crit}$  con la temperatura del entorno. Esta relación también puede obtenerse mediante las simulaciones numéricas. Por lo tanto, dada la temperatura  $T$  del entorno y el estrujamiento inicial  $|r|$  del sistema se puede conocer, mediante la ecuación 6.5, hacia cuál de las tres fases (SD, NSD o SDR) evolucionará el sistema. Esto se indica en diagramas como el de la figura 6.1, que corresponde al caso en que el acoplamiento con el entorno es mediante posición.

En la figura 6.1 se observa que en general, para cualquier estrujamiento inicial, existe una temperatura sobre la cual el entrelazamiento muere. Esta temperatura aumenta exponencialmente con el estrujamiento. La característica más llamativa del diagrama es la zona NSD para bajas temperaturas y bajo estrujamiento. Los estados de esta zona con  $r = 0$  son estados que inicialmente no se encuentran entrelazados, pero que sin embargo presentan entrelazamiento asintótico. Esto significa que el entorno actúa como un canal mediante el cual es posible generar entrelazamiento. Este comportamiento es una consecuencia directa del hecho de que la interacción sea solo en posición, ya que en ese caso el modo  $+$  en el estado asintótico se encuentra estrujado, es decir que  $|r_{crit}| > 0$  (ver ecuación 2.19). Esto se puede entender a partir de las fórmulas 6.6 y 6.7. Para  $r < r_{crit}$  el valor medio  $\tilde{E}_N$  es la distancia (horizontal) entre la curva  $S_{crit}$  y  $r_{crit}$ , y la amplitud  $\Delta E_N$  es igual a  $r$ . Por lo tanto el valor medio del entrelazamiento es independiente de  $r$  y será positivo si  $r_{crit} > S_{crit}$ , lo que ocurre siempre por debajo de una temperatura crítica  $T_0$ .

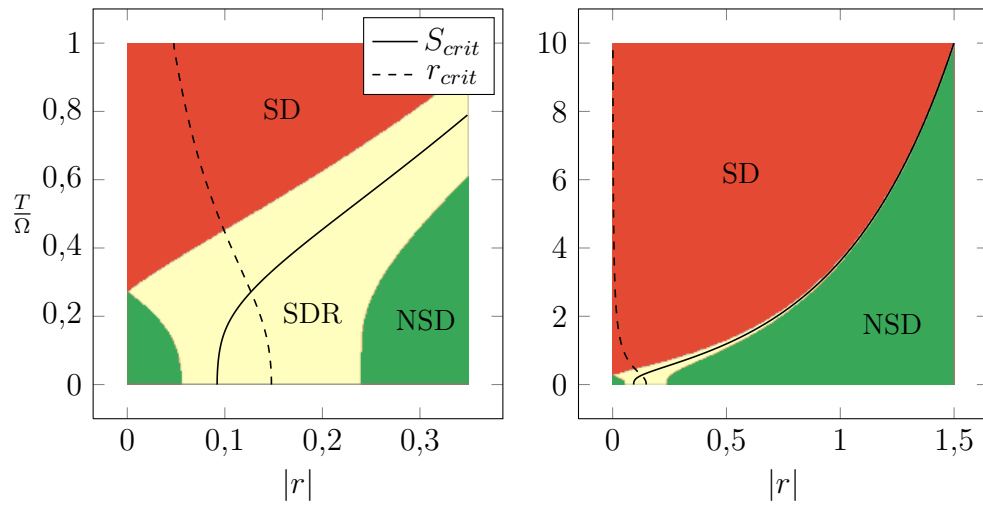


Figura 6.1: Diagrama de fases para el entrelazamiento correspondiente a un entorno óhmico con parámetros  $\Lambda = 20$  y  $\gamma = 0,1$ . El acoplamiento entre sistema y entorno es mediante posición. Los parámetros del sistema son  $m = 1$ ,  $\Omega = 1$  y  $C_{12} = 0$ . El estado inicial es coherente, es decir,  $\Delta x_- \Delta p_- = 1/2$ . La línea de segmentos indica el valor de  $r_{crit}$  para cada temperatura, mientras que la línea continua indica el valor de  $S_{crit}$ . Figura tomada de [7].

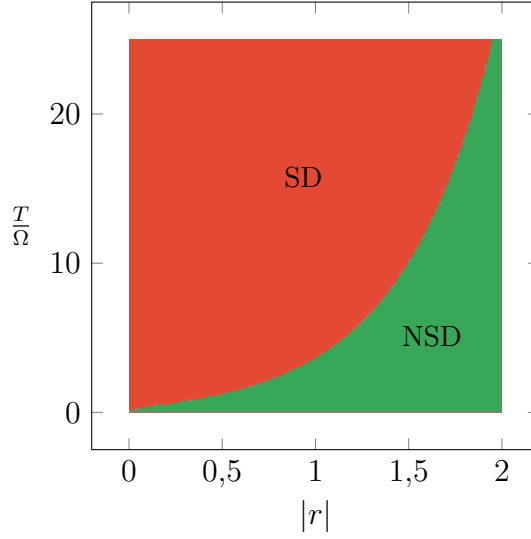


Figura 6.2: Diagrama de fases para el entrelazamiento cuando el acoplamiento entre sistema y entorno es simétrico en posición y momento. El entorno es óhmico con parámetros  $\Lambda = 20$  y  $\gamma = 0,1$ , y para el sistema se tiene  $M = 1$ ,  $\Omega = 1$  y  $\tilde{C}_{12} = C_{12} = 0$ . Figura tomada de [7].

Al aumentar  $r$ , cuando este es comparable a  $r_{crit} - S_{crit}$  se abandona la fase NSD y se ingresa en la fase SDR. Luego, para  $r > r_{crit}$ , el entrelazamiento asintótico es una consecuencia del estrujamiento inicial.

En la figura 6.2 se muestran los resultados cuando el acoplamiento entre sistema y entorno es simétrico en posición y momento. La zona NSD a baja temperatura y bajo estrujamiento desaparece pues en este caso el entorno no genera estrujamiento en el modo  $+$ , es decir,  $r_{crit} = 0$  (ver ecuación 2.23). Esto implica además que  $f(t, r, r_{crit}) = \cosh(2r)$  y por lo tanto ningún invariante simpléctico depende del tiempo<sup>2</sup>, por lo que desaparece también la fase SDR.

### 6.3. Comportamiento de la discordia

Esta sección contiene la mayor parte del trabajo original realizado durante la tesis. Se intenta caracterizar, al igual que se hizo con el entrelazamiento, el comportamiento asintótico de la discordia gaussiana. En lo que sigue, por comodidad, en algunas ocasiones se hace referencia a la discordia gaussiana

<sup>2</sup>Aunque la matriz de covarianza si depende del tiempo.



simplemente como discordia. Sin embargo debe tenerse en cuenta que la discordia gaussiana es sólo una cota superior para la discordia general, como se discute más adelante. En primer lugar se presentan y analizan resultados numéricos. Luego se derivan analíticamente algunas características de los resultados a partir de las expresiones para la discordia dadas en la sección 5.5.2. Los primeros resultados que se muestran corresponden al caso en que el acoplamiento entre sistema y entorno es simétrico en posición y momento. Como se mencionó anteriormente, en ese caso no existe dependencia temporal en los invariantes del estado asintótico y por lo tanto los resultados son más sencillos. Luego se muestran los resultados para el acoplamiento en posición, y se analizan las diferencias que aparecen con respecto al acoplamiento simétrico.

### 6.3.1. Acoplamiento simétrico

El aspecto más sencillo de la discordia gaussiana que se puede analizar es cuál es el tipo de medición que la minimiza. Es decir, dado un cierto estado bipartito, uno puede preguntarse que tipo de medición debe hacer sobre un sistema para obtener máxima información sobre el otro. Según lo expuesto en la sección 5.5.2, estas mediciones pueden ser homodinas o heterodinas. Las primeras corresponden a proyecciones sobre estados infinitamente estrujados, por ejemplo mediciones en la base de autoestados del momento o de la posición, mientras que las segundas son mediciones más generales.

#### Tipo de medición óptima

En la figura 6.3 se indica que tipo de medición corresponde al estado asintótico en función de la temperatura  $T$  del entorno y del estrujamiento  $r$  en el estado inicial del sistema, para un entorno óhmico. Se observa que a temperaturas suficientemente altas la medición siempre es heterodina. Sin embargo, para un estrujamiento  $r$  dado, la temperatura  $T'$  a partir de la cual la medición pasa a ser heterodina aumenta exponencialmente con  $|r|$ . La dependencia entre  $T'$  y  $r$  se indica con la línea continua.

Estos resultados pueden ser comprendidos si se tiene en cuenta que el valor de  $|r|$  indica el grado de localización del modo  $-$ . En el límite en que  $|r| \rightarrow \infty$  existe algún observable asociado al movimiento relativo, por ejemplo  $x_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)$  o  $p_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 - p_2)$ , que se encuentra perfectamente localizado<sup>3</sup>. Suponiendo, por simplicidad, que el observable  $x_-$  es el que se

---

<sup>3</sup>En general el observable  $A$  que se encuentra localizado es una combinación lineal de  $x_-$  y  $p_-$  que rota con el tiempo:  $A(t) = \cos(\omega_- t + \chi)x_- + \frac{1}{m_- \omega_-} \sin(\omega_- t + \chi)p_-$ .

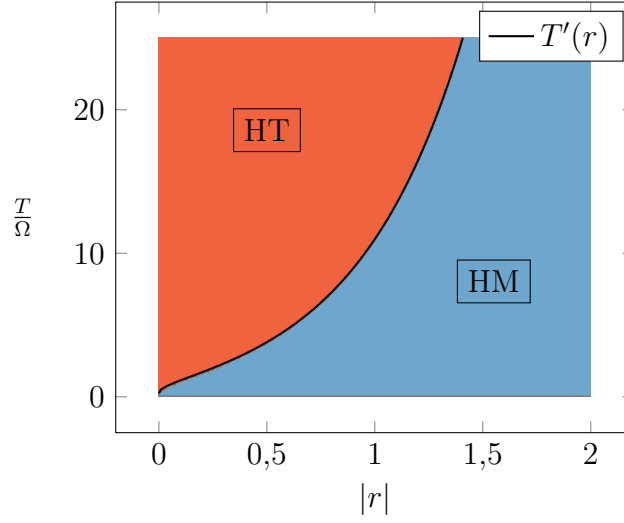


Figura 6.3: Tipo de medición que minimiza la discordia para el estado asintótico. Entorno óhmico con parámetros  $\Lambda = 20$  y  $\gamma = 0,1$ . Los parámetros del sistema son  $M = 1$ ,  $\Omega = 1$  y  $C_{12} = \tilde{C}_{12} = 0$ . La fase naranja corresponde a mediciones heterodinas (HT), y la fase celeste a mediciones homodinas (HM). La línea negra continua indica la separación entre ambas fases.

encuentra localizado, si se mide el observable  $x_1$  entonces el estado del modo 2 luego de la medición es un autoestado de  $x_2$ , y por lo tanto su entropía es cero. Es decir, la medición (homodina) de  $x_1$  sobre el modo 1 permite obtener el máximo de información sobre el modo 2, y consecuentemente esta medición es la que minimiza la discordia. En general, al aumentar el valor del estrujamiento  $r$  aumenta la localización de algún observable asociado al movimiento relativo, y por lo tanto disminuye la entropía del modo 1(2) luego de realizar una medición homodina sobre 2(1), es decir aumenta la información que se obtiene mediante este tipo de mediciones. Este efecto compite con la dispersión en el modo  $+$ , que es proporcional a la temperatura, ya que para temperaturas suficientemente altas la medición que minimiza la discordia pasa a ser heterodina.

Cuando el estado inicial es puro se pueden obtener estos resultados analíticamente a partir de la expresión para la función  $g$ , ecuación 5.70, que determina cuál es el tipo de medición que minimiza la discordia en función de los invariantes locales. Para estados iniciales puros se tiene  $\phi_- = \Delta x_- \Delta p_- = 1/2$ . Por lo tanto los invariantes locales  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  solo dependen de  $\phi_+$  y  $f$  (ecuación 6.2). Se puede ver que  $g$  resulta ser un polinomio de grado 8 en  $\phi_+$

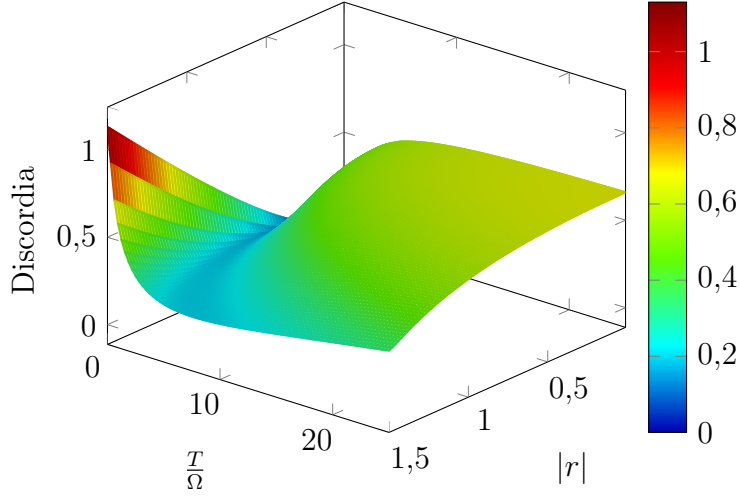


Figura 6.4: Discordia para el estado asintótico. Entorno óhmico con parámetros  $\Lambda = 20$  y  $\gamma = 0,1$ . Los parámetros del sistema son  $M = 1$ ,  $\Omega = 1$  y  $C_{12} = \tilde{C}_{12} = 0$ .

y  $f$  que para  $\phi_+ > 1/2$  y  $f > 1$  se anula si y solo si  $f = f_{crit}(\phi_+)$ , con:

$$f_{crit} = \frac{-1}{3}\phi_+ + \frac{1}{6}\sqrt{16\phi_+^2 + 56 + \phi_+^{-2}} - \frac{1}{12\phi_+} \xrightarrow{\phi \gg 1} f_{crit} = \frac{1}{3}\phi_+ \quad (6.8)$$

La medición será homodina ( $g > 0$ ) para  $f > f_{crit}$  o heterodina ( $g \leq 0$ ) para  $f \leq f_{crit}$ . En el caso de acoplamiento simétrico se tiene que  $f = \cosh(2r)$ , debido a que  $r_{crit} = 0$ . Además también es válido el principio de equipartición, por lo que  $\phi_+ = \frac{1}{2} \coth\left(\frac{\Omega}{2T}\right)$ , donde  $T$  es la temperatura del entorno. La curva que da la separación entre las fases HT y HM de la figura 6.3 está dada por la condición  $f = f_{crit}$ , es decir:

$$\cosh(2r) = f_{crit}(\phi_+(T')) \quad (6.9)$$

que para  $T'$  y  $r$  grandes se reduce a  $r = \frac{1}{2} \log\left(\frac{2T'}{3\Omega}\right)$ .

## Discordia

A continuación se discuten los resultados obtenidos para el valor de la discordia gaussiana en el estado asintótico. En la figura 6.4 se muestra la sábana dada por el valor de la discordia en función de la temperatura del entorno y del estrujamiento inicial. Para  $T = 0$  se observa que la discordia aumenta con el estrujamiento  $r$  del modo  $-$ , lo cual resulta natural si se tiene en cuenta

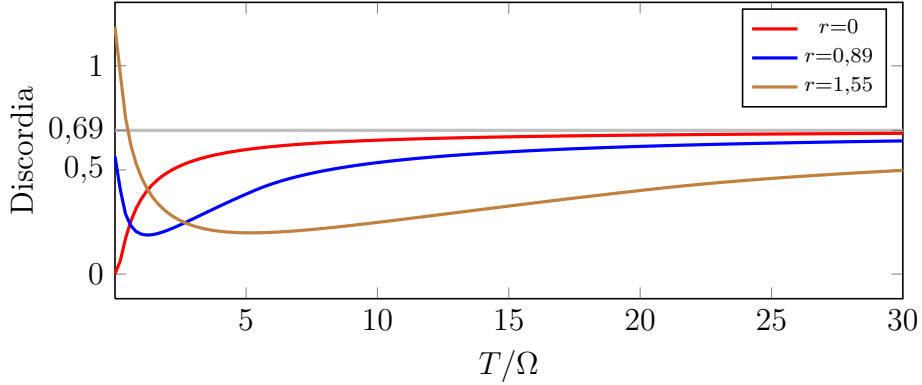


Figura 6.5: Discordia en función de la temperatura para distintos valores del estrujamiento inicial. Entorno óhmico con parámetros  $\Lambda = 20$  y  $\gamma = 0,1$ . Los parámetros del sistema son  $M = 1$ ,  $\Omega = 1$  y  $C_{12} = \tilde{C}_{12} = 0$ .

el comportamiento de la discordia para estados térmicos estrujados (sección 5.6). A medida que se aumenta la temperatura, la discordia disminuye hasta un cierto valor mínimo y luego *crece monótonamente con la temperatura*, lo cual resulta llamativo ya que sugiere que el ruido introducido por el entorno en el sistema es capaz de crear correlaciones cuánticas aún a altas temperaturas. Este comportamiento contrasta claramente con la muerte súbita del entrelazamiento, que ocurre siempre para temperaturas suficientemente altas como se muestra en las figuras 6.1 y 6.2. La dependencia de la discordia con la temperatura del entorno se muestra con más detalle en la figura 6.5, donde se observa que crece con la temperatura hasta alcanzar cierto valor asintótico.

Estos resultados pueden ser obtenidos analíticamente a partir de las ecuaciones 5.67 y 5.69. En el límite de alta temperatura se tiene que  $\Delta x_+ \Delta p_+ \rightarrow \infty$ , y por lo tanto los invariantes simplécticos toman los siguientes valores sencillos<sup>4</sup>:

$$A = B \simeq \frac{\phi_+^2}{4} \quad C \simeq \frac{\phi_+^2}{4} \quad D \simeq \phi_+^2 \phi_-^2 \quad (6.10)$$

Estas expresiones son útiles en el límite de alta temperatura tanto para acoplamiento simétrico como para acoplamiento en posición, ya que en esta aproximación se desprecian todos los efectos del estrujamiento en los modos  $+$  y  $-$ . Utilizando estas expresiones se obtiene que para estados iniciales coherentes ( $\phi_- = 1/2$ )  $E_{min} \rightarrow 9/4$  (ver ecuación 5.69). Además, los autovalores simplécticos de la matriz de covarianza del estado asintótico son exactamente

<sup>4</sup>Estos resultados son válidos cuando  $\phi_+ \gg \phi_-$  y  $\phi_+ \gg \cosh(2r)$

$\nu_+ = \phi_+$  y  $\nu_- = \phi_-$ , como puede verse de la expresión 2.33 para la matriz de covarianza de los modos + y - si se tiene en cuenta que la transformación de estos a los modos 1 y 2 es simpléctica y no modifica los autovalores. Entonces la discordia en el límite de alta temperatura es:

$$\begin{aligned} D &= f(\sqrt{B}) - f(\nu_+) - f(\nu_-) + f(\sqrt{E_{min}}) \\ &= f\left(\frac{\phi_+}{2}\right) - f(\phi_+) - f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) \end{aligned} \quad (6.11)$$

donde  $f(x)$  es la función entrópica 5.28. El término  $f(\phi_+/2) - f(\phi_+)$  es una función creciente de  $\phi_+$  que para  $\phi_+ \gg 1$  alcanza el valor asintótico  $-\log(2)$ .<sup>5</sup> Entonces se obtiene que para altas temperaturas la discordia crece con la temperatura y alcanza el valor asintótico:

$$D = -\log(2) - f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) = \log(2) = 0,693... \quad (6.12)$$

lo cual está en acuerdo con los resultados numéricos de las figuras 6.4 y 6.5. Por lo tanto, cuando el entorno está a una temperatura  $T$  tal que  $\phi_+ \gg \phi_-$  y  $\phi_+ \gg \cosh(2r)$ , la discordia gaussiana del estado de equilibrio de los osciladores 1 y 2 no puede superar la unidad mínima de información  $\log(2)$ , es decir la cantidad de información que se puede almacenar en un sistema de dos niveles. Esta cota no coincide con la cota 5.72 para estados separables debido a que el estado asintótico es simétrico con respecto a los modos 1 y 2, es decir,  $\alpha = \beta$ .

Como se mencionó en la sección 5.5.2 la discordia gaussiana para estados separables no puede superar la unidad (ver ecuación 5.72). Por lo tanto es posible utilizar la discordia gaussiana para detectar entrelazamiento: si es superior a 1 entonces el estado es entrelazado. En la figura 6.6 se muestra la curva dada por los estados asintóticos para los cuales la discordia es igual a 1, en función de la temperatura  $T$  y el estrujamiento inicial  $r$ . Para un estrujamiento  $r$  fijo, los estados correspondientes a temperaturas mayores a la dada por esa curva tienen discordia menor que 1, mientras que los estados que se encuentran por debajo de esa curva tienen discordia mayor que 1. En la misma figura se muestra la curva que separa los estados separables de los entrelazados, y como se puede ver ambas curvas no coinciden. Por lo tanto se concluye que al menos para los estados asintóticos generados en este modelo la discordia gaussiana no es un buen indicador del entrelazamiento. Por completitud también se indica la curva que separa los estados para los cuales la medición que minimiza la discordia es heterodina de aquellos para los cuales es homodina.

<sup>5</sup>La función  $f$  verifica que  $f(x) - f(y) \xrightarrow{x,y \rightarrow \infty} \log(x/y)$

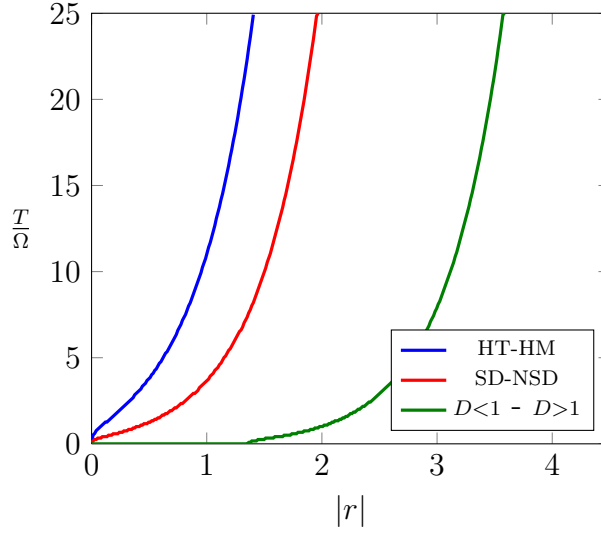


Figura 6.6: Curvas que separan los estados asintóticos según: el tipo de medición que minimiza la discordia (rojo), su entrelazamiento (azul), si la discordia es mayor o menor que 1 (verde).

### Discusión y antecedentes

El hecho de que la discordia gaussiana entre los dos osciladores del sistema puede alcanzar valores no nulos debido a la interacción con el entorno aún para altas temperaturas fue observado por primera vez en [38], aunque los resultados fueron obtenidos en la aproximación de acoplamiento débil y no fue caracterizado el comportamiento de la discordia en el estado asintótico. Si bien la generación de correlaciones cuánticas mediante la interacción con el entorno a alta temperatura resulta antiintuitiva, hay que tener en cuenta que en realidad el resultado obtenido es sólo una cota superior para las correlaciones cuánticas. Es decir, hasta el momento no existe ninguna prueba de que las mediciones gaussianas sean las que minimizan la discordia para estados gaussianos. Dado un estado gaussiano bipartito, la medición que debe realizarse sobre un subsistema para obtener máxima información sobre el otro puede no ser gaussiana. Si ese fuera el caso entonces la discordia gaussiana es solo una cota superior para la discordia general. De hecho, fue probado en [39] que una medida de correlaciones estrechamente ligada a la discordia, llamada AMID por sus siglas en inglés<sup>6</sup>, para ciertos estados gaussianos es

<sup>6</sup>Ameliorated Measurement Induced Disturbance. Al igual de la discordia, se trata de la diferencia entre la información mutua total contenida en un estado bipartito y la información mutua que puede ser obtenida mediante mediciones locales, con la diferencia

optimizada por medio de proyecciones sobre estados de Fock, es decir mediante conteo de fotones. Sin embargo, en el mismo trabajo se menciona que estudios numéricos preliminares indican que aunque se permitan este tipo de mediciones en la optimización de la discordia de estados gaussianos las mediciones óptimas siguen siendo gaussianas.

Existen trabajos recientes donde se analiza la evolución de la discordia en sistemas abiertos de dos qubits [40, 41], para los cuales la discordia puede calcularse exactamente. En [40] se muestra que si el entorno induce ruido blanco sobre el sistema de dos qubits entonces es posible generar discordia entre ellos. Bajo ciertas condiciones sucede que para estados iniciales con discordia nula esta crece con el tiempo hasta alcanzar un valor estacionario. Este comportamiento es similar al que se obtuvo aquí, aunque en el caso del sistema de 2 qubits el valor máximo que alcanza la discordia tiene a cero a medida que aumenta la intensidad del ruido.

### 6.3.2. Acoplamiento en posición

Cuando el acoplamiento entre sistema y entorno es sólo mediante la coordenada posición la principal diferencia que aparece con respecto al caso de acoplamiento simétrico es que los invariantes simplécticos de la matriz de covarianza para el estado asintótico pueden depender del tiempo. Esto se debe a que  $r_{crit} \neq 0$ , como se ve deduce de las dispersiones asintóticas 2.19 para el modo  $+$ . Las consecuencias de esta dependencia temporal es que el valor de la discordia oscila en el tiempo una vez alcanzado el estado de equilibrio, y que para ciertos estrujamientos iniciales y temperaturas del entorno la medición que minimiza la discordia no es ni heterodina ni homodina para cualquier tiempo sino que alterna entre uno y otro tipo. Sin embargo, a medida que aumenta la temperatura  $T$  del entorno,  $r_{crit}$  decrece hasta anularse para  $T \rightarrow \infty$ , como se indica en la figura 6.1 mediante la curva de segmentos. Por lo tanto para temperaturas altas el acoplamiento en posición es equivalente al acoplamiento simétrico. Esto ya se observa al comparar las figuras 6.1 y 6.2, ya que la fase SDR, que es donde hay dependencia temporal, desaparece para temperaturas altas .

En la figura 6.7 se muestra, como antes, el tipo de medición correspondiente al estado asintótico en función de la temperatura del entorno y del estrujamiento en el estado inicial. Se ve que entre las fases HM y HT aparece una tercera fase en la que el tipo de medición que minimiza la discordia cambia entre homodina y heterodina a medida que transcurre el tiempo. Además esta zona se encuentra en torno a la curva que separa las fases HT y HM en

---

de que las mediciones locales son realizadas sobre ambos subsistemas.

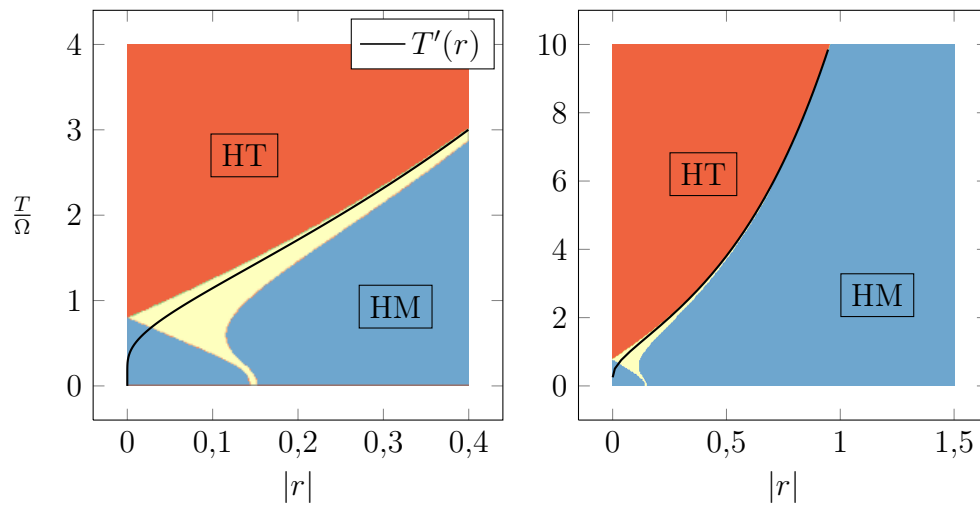


Figura 6.7: Tipo de medición que minimiza la discordia para el estado asintótico. Entorno óhmico con parámetros  $\Lambda = 20$  y  $\gamma = 0,1$ . Los parámetros del sistema son  $m = 1$ ,  $\Omega = 1$  y  $C_{12} = 0$ . La fase naranja corresponde a mediciones heterodinas (HT), y la fase celeste a mediciones homodinas (HM). La fase amarilla intermedia corresponde al caso en que la medición que minimiza la discordia alterna entre homodina y heterodina a medida que pasa el tiempo. La línea continua indica la separación entre las fases HT y HM para el caso de acoplamiento simétrico.



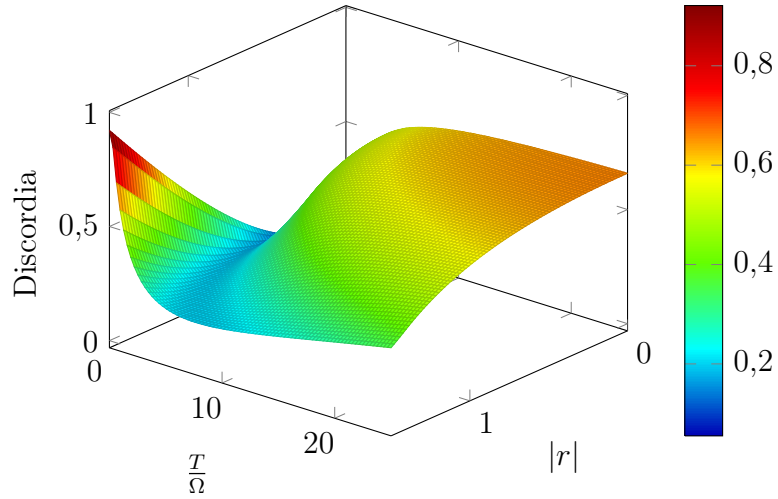


Figura 6.8: Valor medio de las oscilaciones de la discordia para el estado asintótico. Entorno óhmico con parámetros  $\Lambda = 20$  y  $\gamma = 0,1$ . Los parámetros del sistema son  $m = 1$ ,  $\Omega = 1$  y  $C_{12} = 0$ .

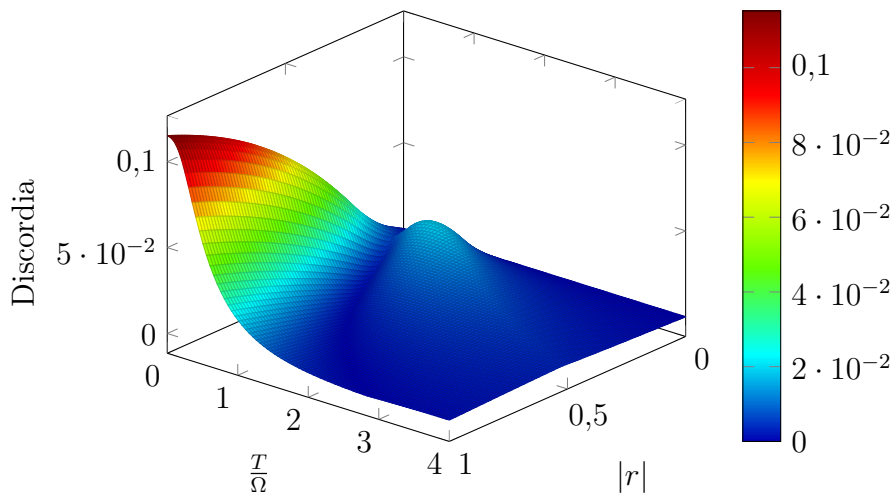


Figura 6.9: Amplitud de las oscilaciones de la discordia para el estado asintótico. Entorno óhmico con parámetros  $\Lambda = 20$  y  $\gamma = 0,1$ . Los parámetros del sistema son  $m = 1$ ,  $\Omega = 1$  y  $C_{12} = 0$ .

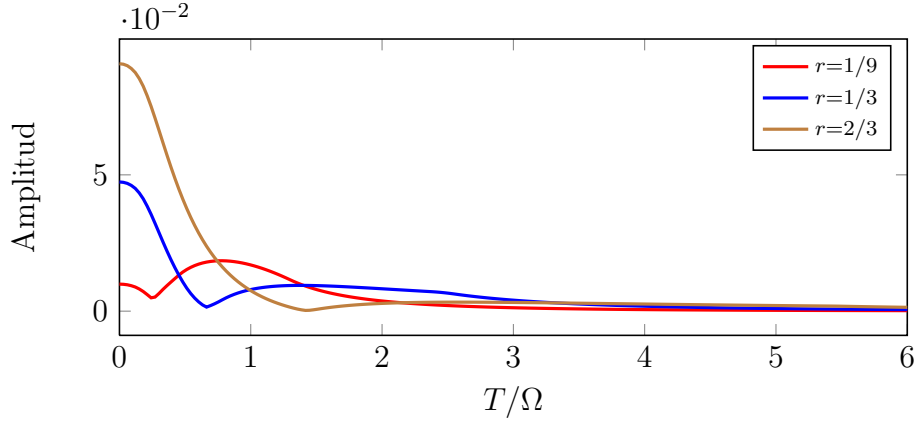


Figura 6.10: Amplitud de las oscilaciones de la discordia en el estado asintótico en función de la temperatura para distintos valores del estrujamiento inicial. Entorno óhmico con parámetros  $\Lambda = 20$  y  $\gamma = 0,1$ . Los parámetros del sistema son  $m = 1$ ,  $\Omega = 1$  y  $C_{12} = 0$ .

el caso de acoplamiento simétrico, dada por la ecuación 6.9, y se hace más angosta a medida que la temperatura aumenta, excepto a bajas temperaturas donde tiene una forma más complicada.

En el estado de equilibrio la discordia presenta oscilaciones periódicas a una frecuencia igual al doble de la frecuencia de evolución del modo – (ver ecuación 6.2). El valor medio de estas oscilaciones se comporta esencialmente de la misma manera que el valor (constante) de la discordia para el caso de acoplamiento simétrico, como se muestra en la figura 6.8. En la figura 6.9 se muestra la amplitud de las oscilaciones en función de la temperatura del entorno y del estrujamiento en el estado inicial. Se observa que la amplitud decae a cero rápidamente a medida que aumenta la temperatura, lo que se muestra con más detalle en la figura 6.10.

### 6.3.3. Estados iniciales térmicos

Todos los resultados presentados hasta aquí corresponden a estados iniciales puros, para los cuales la incerteza en el modo – es mínima:  $\phi_- = \Delta x_- \Delta p_- = 1/2$ . En esta sección se investiga cuál es el efecto que tiene sobre el estado asintótico de la discordia el hecho de que el estado inicial sea térmico, es decir que  $\phi_- > 1/2$ . Por simplicidad se considera acoplamiento simétrico entre sistema y entorno.

En la figura 6.11 se muestra el diagrama de fases que da el tipo de me-

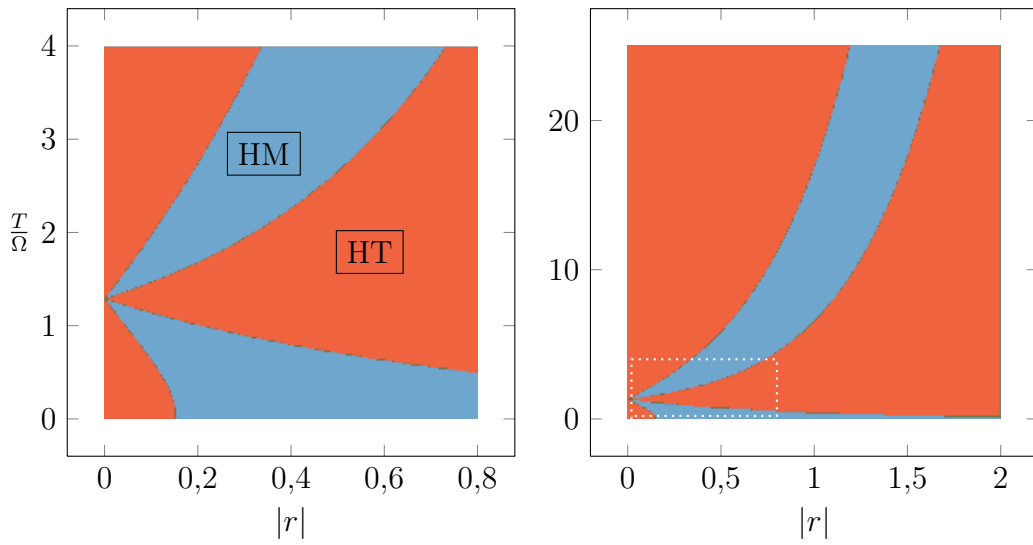


Figura 6.11: Tipo de medición que minimiza la discordia para el estado asintótico. Entorno óhmico con parámetros  $\Lambda = 20$  y  $\gamma = 0,1$ . Los parámetros del sistema son  $M = 1$ ,  $\Omega = 1$  y  $C_{12} = \tilde{C}_{12} = 0$ . La fase naranja corresponde a mediciones heterodinas (HT), y la fase verde a mediciones homodinas (HM). Acoplamiento simétrico, estado inicial térmico con  $\phi_- = 3/2$ .

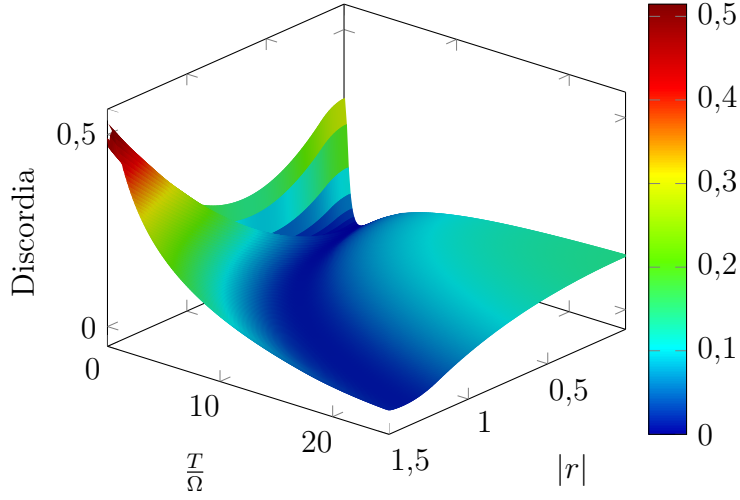


Figura 6.12: Discordia para el estado asintótico. Entorno óhmico con parámetros  $\Lambda = 20$  y  $\gamma = 0,1$ . Los parámetros del sistema son  $M = 1$ ,  $\Omega = 1$  y  $C_{12} = \tilde{C}_{12} = 0$ . Acoplamiento simétrico, estado inicial térmico con  $\phi_- = 3/2$ .

dición que minimiza la discordia. La topología de las fases se vuelve más complicada con respecto a los casos anteriores y disminuye el tamaño de la fase HM, siendo la diferencia fundamental que la medición resulta heterodina en lugar de homodina para  $r \rightarrow \infty$ .

En la figura 6.12 se muestra como se modifica el valor de la discordia en el estado asintótico. A diferencia del caso anterior, para  $T = 0$  y  $r = 0$  la discordia es no nula. Además disminuye el valor de la discordia en el límite de alta temperatura. En la figura 6.13 se muestra con más detalle la dependencia con la temperatura.

Es posible generalizar el resultado 6.12 y obtener una expresión analítica para el valor asintótico de la discordia en el límite de alta temperatura en función de la temperatura en el estado inicial. Utilizando las expresiones aproximadas 6.10 para los invariantes se puede ver que  $E_{min} \rightarrow 4(\phi_- + 1/4)^2$  en el límite de alta temperatura  $\phi_+ \rightarrow \infty$ . Como antes, independientemente de cualquier aproximación, los autovalores simplécticos son  $\nu_- = \phi_-$  y  $\nu_+ = \phi_+$ . Por lo tanto, la discordia es:

$$\begin{aligned}
 D &= f(\sqrt{B}) - f(\nu_+) - f(\nu_-) + f(\sqrt{E_{min}}) \\
 &= f\left(\frac{\phi_+}{2}\right) - f(\phi_+) - f(\phi_-) + f\left(2\left(\phi_- + \frac{1}{4}\right)\right)
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

Como se menciono antes, el término  $f(\phi_+/2) - f(\phi_+)$  crece con la tempe-

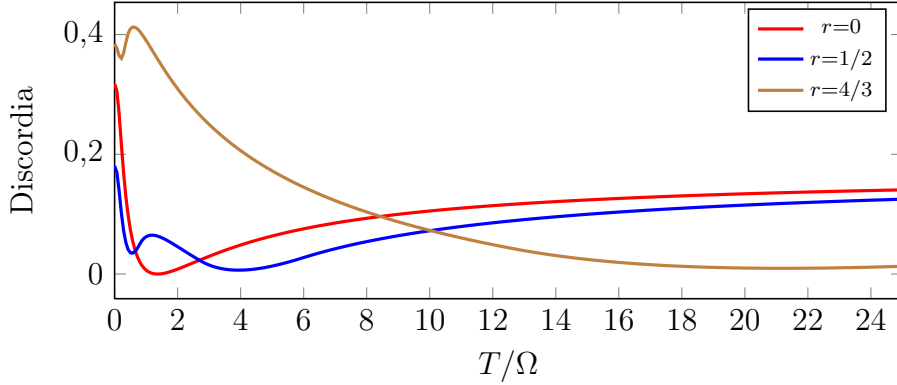


Figura 6.13: Discordia en función de la temperatura para distintos valores del estrujamiento inicial. Entorno óhmico con parámetros  $\Lambda = 20$  y  $\gamma = 0,1$ . Los parámetros del sistema son  $M = 1$ ,  $\Omega = 1$  y  $C_{12} = \tilde{C}_{12} = 0$ . Acoplamiento simétrico, estado inicial térmico con  $\phi_- = 3/2$ .

ratura alcanzado el valor asintótico  $-\log(2)$ . Entonces en esta aproximación la discordia también es una función creciente de la temperatura cuyo valor límite es:

$$D_{sup} = f\left(2\phi_- + \frac{1}{2}\right) - f(\phi_-) - \log(2) \quad (6.14)$$

Esta es un función decreciente de  $\phi_-$  que se anula para  $\phi_- \rightarrow \infty$ . Por lo tanto el ruido térmico presente en el estado inicial disminuye la discordia que un entorno a alta temperatura es capaz de crear. En la figura 6.14 se compara este resultado con los obtenidos a partir de las simulaciones. Los datos se presentan en función de la temperatura inicial  $T_0$ , que está relacionada con la dispersión en el modo  $-$  según  $\phi_- = \frac{1}{2} \coth\left(\frac{\Omega}{2T_0}\right)$ <sup>7</sup>.

### 6.3.4. Entornos sub-óhmicos

Todos los resultados anteriores corresponden a entornos óhmicos. Para los entornos súper-óhmicos se considera que el sistema no alcanza el equilibrio con el entorno, como se discutió en las secciones 2.3 y 2.5, y por lo tanto no son analizados aquí. Resta analizar los efectos de los entornos sub-óhmicos. Cuando el acoplamiento entre sistema y entorno es simétrico en posición y momento los resultados para entornos óhmicos y sub-óhmicos son esencialmente los mismos. Las diferencias aparecen cuando el acoplamiento es en posición. En ese caso, la particularidad de los entornos sub-óhmicos es que

<sup>7</sup>Para osciladores no interactuantes,  $C_{12} = \tilde{C}_{12} = 0$ , se tiene que  $\Omega = \omega_-$ .

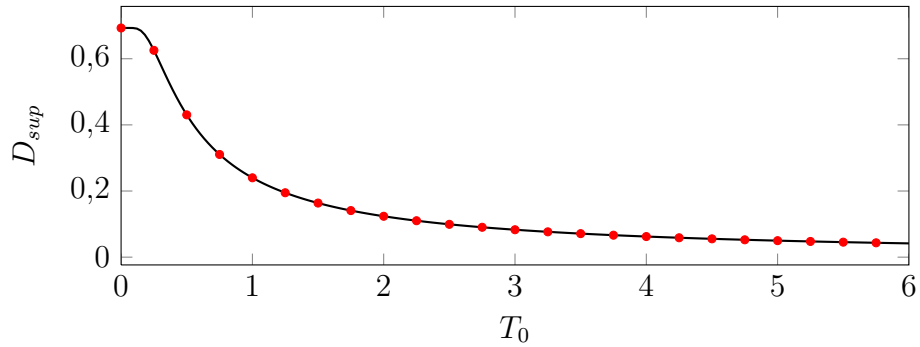


Figura 6.14: Valor de la discordia del estado asintótico en el límite de alta temperatura en función de la temperatura inicial del modo  $-$ . Los puntos corresponden a las simulaciones numéricas mientras que la curva continua corresponde a la ecuación 6.14.

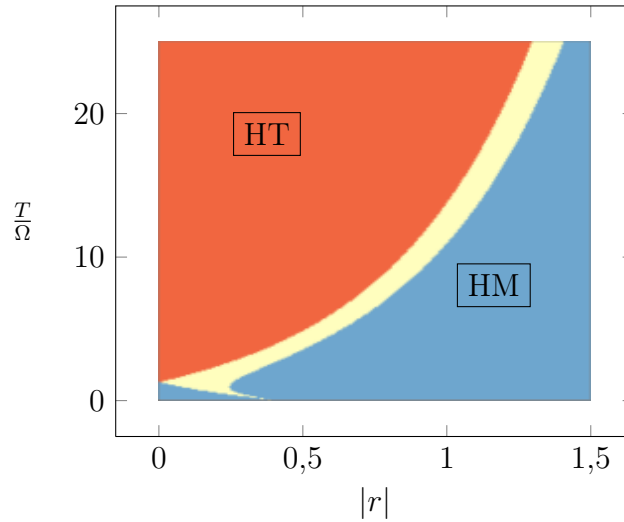


Figura 6.15: Tipo de medición que minimiza la discordia para el estado asintótico. Entorno sub-ohmico con parámetros  $n = 1/2$ ,  $\Lambda = 20$  y  $\gamma = 0,1$ . Los parámetros del sistema son  $m = 1$ ,  $\Omega = 1$  y  $C_{12} = 0$ . La fase naranja corresponde a mediciones heterodinas (HT), y la fase celeste a mediciones homodinas (HM). La fase amarilla intermedia corresponde al caso en que la medición que minimiza la discordia alterna entre homodina y heterodina a medida que pasa el tiempo.

el estrujamiento  $r_{crit}$  que inducen sobre el modo  $+$  no se anula para altas temperaturas, como si sucedía para entornos óhmicos, sino que alcanza un valor constante. La consecuencia principal es que la fase en la que no está definido el tipo de medición que minimiza la discordia no desaparece para altas temperaturas, como se ve en la figura 6.15. Análogamente, para ciertos valores de estrujamiento inicial las oscilaciones en el valor de la discordia persisten aún a altas temperaturas, aunque el valor medio se comporta de la misma manera que en los casos anteriores.

## 6.4. Evolución de las correlaciones

En esta sección se analiza la evolución de las correlaciones desde el instante inicial hasta que se alcanza el equilibrio con el entorno. Los resultados fueron obtenidos mediante simulaciones numéricas realizadas como se explica en la sección 2.5. Se utilizó un entorno formado por  $N = 300$  osciladores.

Como se discutió anteriormente, el estado inicial es separable con respecto al sistema y al entorno, y el entorno se encuentra en un estado térmico a temperatura  $T$ . Para el sistema formado por los osciladores 1 y 2 se consideraron dos tipos de estados iniciales: estrujados separables y estrujados de 2 modos. Los primeros se obtienen a partir de un estado térmico aplicando un estrujamiento  $U(r)$  (ecuación 5.19) a los modos 1 y 2 por separado, mientras que los últimos se obtienen aplicando un estrujamiento  $S(r)$  (ecuación 5.73). En ambos casos se tiene  $\frac{\Delta x_-}{\Delta p_-} \propto e^{2r}$ . Si la temperatura del estado térmico del cual se parte es  $T_0$  vale que  $\phi_- = \Delta x_- \Delta p_- = \frac{1}{2} \coth\left(\frac{\Omega}{2T_0}\right)$ .

En los gráficos los estados iniciales separables se indicaran como ‘sep’ y los estrujados de 2 modos se indicaran como ‘ent’, aunque estos últimos solo resultan entrelazados para cualquier valor no nulo de  $r$  cuando  $T_0 = 0$ , es decir cuando el estrujamiento se aplica sobre un estado coherente.

### 6.4.1. Acoplamiento simétrico

En la figura 6.16 se muestra la evolución de la negatividad logarítmica y de la discordia para dos estados iniciales distintos, uno separable y el otro entrelazado, ambos con  $r = 1$ . La temperatura del entorno es  $T = 0$ . De acuerdo con los resultados de la sección anterior, tanto el entrelazamiento como la discordia para tiempos asintóticos solo dependen del valor de  $r$ . Debido a la interacción con el entorno se pierde toda la información sobre las correlaciones en el estado inicial, excepto aquella contenida en el modo  $-$ .

En este caso la dinámica del entrelazamiento y la discordia es esencialmente la misma, aunque no es cierto que durante la evolución la discordia

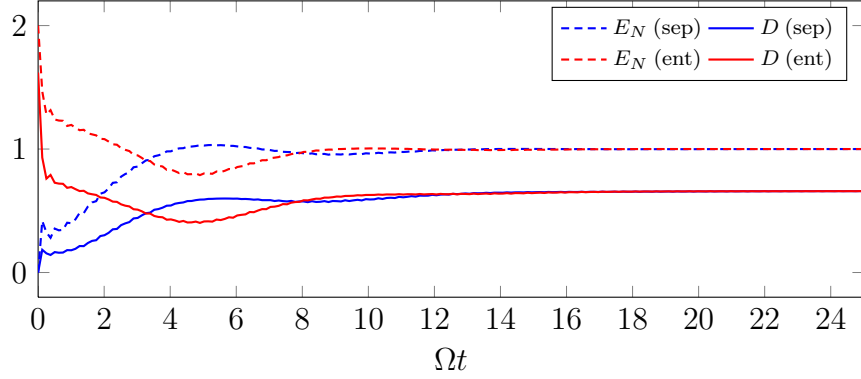


Figura 6.16: Evolución de la negatividad logarítmica ( $E_N$ ) y de la discordia ( $D$ ) cuando la temperatura del entorno es  $T = 0$ . Se considera un estado inicial coherente separable (azul) y otro entrelazado (rojo), ambos con  $r = 1$ . Entorno óhmico con parámetros  $\Lambda = 20$  y  $\gamma = 0,1$ . Los parámetros del sistema son  $M = 1$ ,  $\Omega = 1$  y  $C_{12} = \tilde{C}_{12} = 0$ .

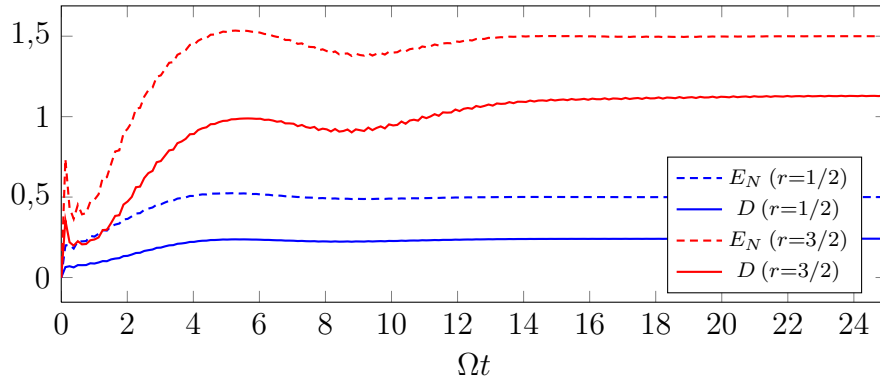


Figura 6.17: Evolución de la negatividad logarítmica ( $E_N$ ) y de la discordia ( $D$ ) cuando la temperatura del entorno es  $T = 0$ . Se consideran dos estados iniciales coherentes separables con  $r = 1/2$  (azul) y  $r = 3/2$  (rojo), ambos con  $r = 1$ . Entorno óhmico con parámetros  $\Lambda = 20$  y  $\gamma = 0,1$ . Los parámetros del sistema son  $M = 1$ ,  $\Omega = 1$  y  $C_{12} = \tilde{C}_{12} = 0$ .



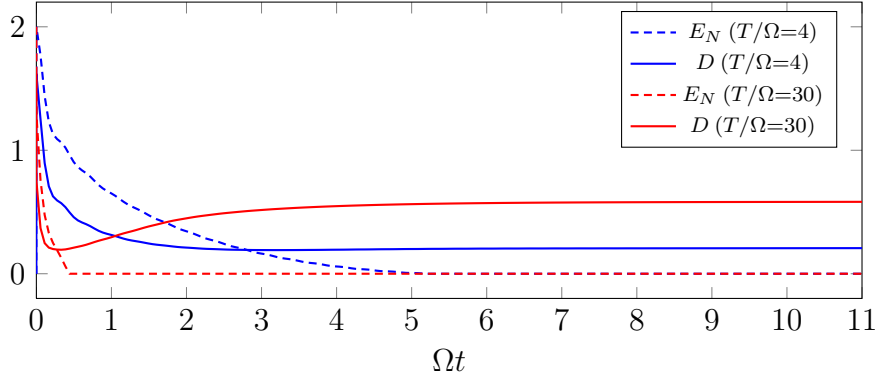


Figura 6.18: Evolución de la negatividad logarítmica ( $E_N$ ) y de la discordia ( $D$ ) para un estado inicial entrelazado con  $r = 1$  cuando la temperatura del entorno es  $T = 4\Omega$  (azul) y  $T = 30\Omega$  (rojo). Entorno óhmico con parámetros  $\Lambda = 20$  y  $\gamma = 0,1$ . Los parámetros del sistema son  $M = 1$ ,  $\Omega = 1$  y  $C_{12} = \tilde{C}_{12} = 0$ .

sea función del entrelazamiento o viceversa. Se observa que las correlaciones cuánticas son creadas o destruidas en dos escalas temporales diferentes. Por ejemplo, cuando el estado inicial es entrelazado las correlaciones decaen abruptamente en un tiempo que es mucho menor que el tiempo característico del sistema  $\tau = 2\pi\Omega^{-1}$ . Luego las correlaciones oscilan con un período comparable a  $\tau$  y la amplitud de esta oscilación decae con un tiempo característico dado por  $\gamma_0$ . El primer decaimiento abrupto se debe al proceso de decoherencia, que ocurre en un tiempo que en general es mucho menor que el tiempo característico de evolución [42].

En la figura 6.17 se muestra la evolución para estados separables con distinto estrujamiento, también para  $T = 0$ . Se observa que el valor asintótico de la discordia aumenta con  $r$ , en acuerdo con la figura 6.4.

Más interesantes resultan los casos donde la temperatura del entorno es mayor que cero y el estrujamiento inicial es chico, ya que según los resultados anteriores en esas situaciones el entrelazamiento se anula en un tiempo finito mientras que la discordia alcanza un valor asintótico no nulo, creciente con la temperatura. Esto se muestra en la figura 6.18, donde además se observa que al aumentar la temperatura el entrelazamiento muere más rápido.

### Entornos sub-óhmicos y súper-óhmicos

Para entornos sub-óhmicos los resultados son similares, excepto que el equilibrio se alcanza más rápido que para entornos óhmicos con los mismos

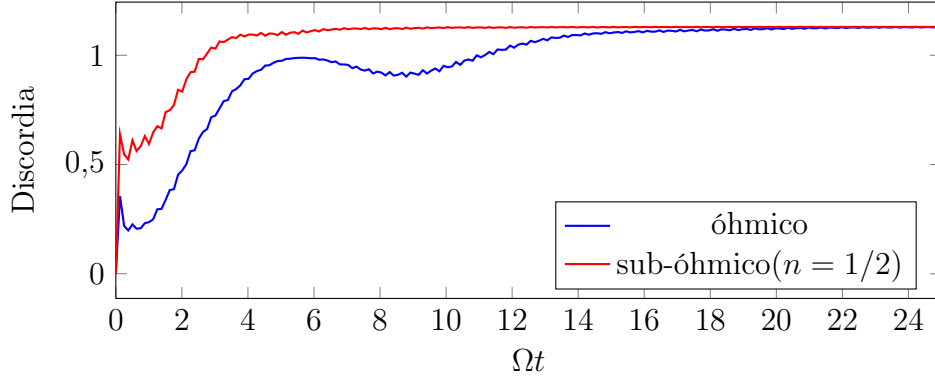


Figura 6.19: Evolución de la discordia para un estado inicial separable con  $r = 1$  para un entorno óhmico (azul) y uno sub-óhmico con  $n = 1/2$  (rojo). La temperatura del entorno es  $T = 0$ . Los parámetros del entorno son  $\Lambda = 20$  y  $\gamma = 0,1$ . Los parámetros del sistema son  $M = 1$ ,  $\Omega = 1$  y  $C_{12} = \tilde{C}_{12} = 0$ .

parámetros. La razón es que estos entornos son más disipativos, como se discute en la sección 2.3.1. Esto se muestra en la figura 6.19.

En la figura 6.20 se muestra la evolución de la discordia y el entrelazamiento para un entorno súper-óhmico con  $n = 3$ . Se observan oscilaciones de las correlaciones a tiempos largos, debido a que el coeficiente de disipación alcanza un valor chico comparado con  $\Omega$ , como se mencionó en la sección 2.3.1. Para  $T = 0$  la dinámica de la discordia es similar a la del entrelazamiento, pero para temperaturas altas se observan eventos de muerte súbita del entrelazamiento mientras que la discordia mantiene un valor no nulo. Además la amplitud de las oscilaciones disminuye con la temperatura del entorno.

### 6.4.2. Acoplamiento en posición

Como se discutió en la sección anterior, al interactuar con el entorno las correlaciones preexistentes en el sistema se degradan en dos escalas temporales diferentes. La escala temporal mas corta se debe al proceso de decoherencia, que ocurre en un tiempo mucho menor al tiempo característico de evolución del sistema  $\tau = 2\pi\Omega^{-1}$ . Luego las correlaciones alcanzan el equilibrio en un tiempo dado por  $\gamma^{-1}$ . Una diferencia importante que aparece en el caso de acoplamiento en posición es que el tiempo en que el sistema decohere depende si el estado inicial está estrujado en momento o en posición, siendo en este último caso comparable a  $\tau$ , como se puede ver en la figura 6.21. La razón por la que esto sucede es que el entorno ‘monitorea’ constantemente la coordenada  $q_+$  del sistema. Un estado inicial localizado en  $p_+$  ( $r > 0$ ) repre-

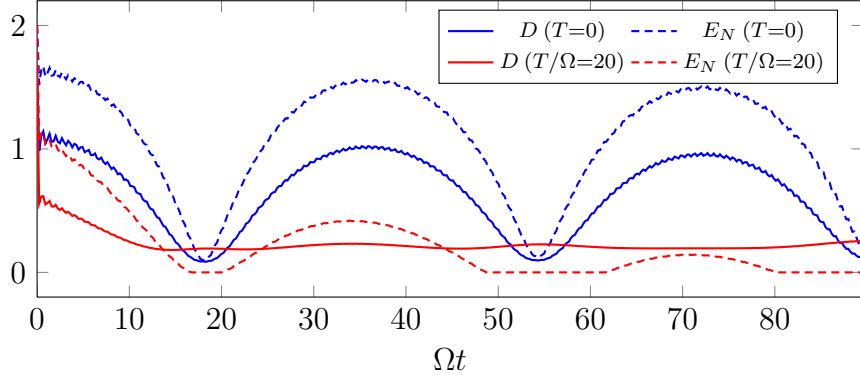


Figura 6.20: Evolución de la discordia ( $D$ ) y la negatividad logarítmica ( $E_N$ ) para un estado inicial entrelazado con  $r = 1$  para un entorno súper-óhmico ( $n=3$ ) cuando la temperatura del entorno es  $T = 0$  (azul) y  $T = 10\Omega$  (rojo). Los parámetros del entorno son  $\Lambda = 20$  y  $\gamma = 0,1$ . Los parámetros del sistema son  $M = 1$ ,  $\Omega = 1$  y  $C_{12} = \tilde{C}_{12} = 0$ .

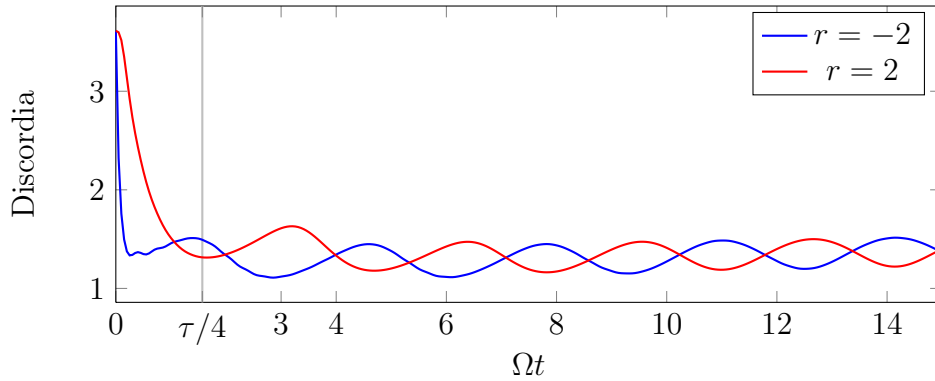


Figura 6.21: Evolución de la discordia para valores positivos y negativos de estrujamiento inicial para un entorno óhmico cuando el acoplamiento es solamente mediante posición. La temperatura del entorno es  $T = 0$ . Los parámetros del entorno son  $\Lambda = 20$  y  $\gamma = 0,1$ . Los parámetros del sistema son  $M = 1$ ,  $\Omega = 1$  y  $C_{12} = 0$ .

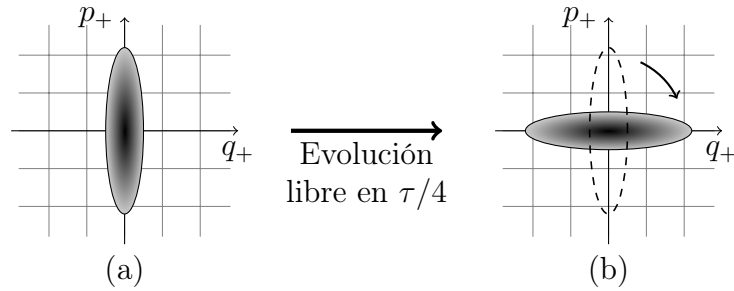


Figura 6.22: La evolución libre del sistema es una rotación en el espacio de fases. Luego de un cuarto del período un estado estrujado en  $q_+$  (a) evoluciona en un estado estrujado en  $p_+$  (b).

senta una superposición coherente de distintas posiciones  $q_+$  y por lo tanto pierde coherencia rápidamente. Sin embargo, un estado inicial localizado en  $q_+$  ( $r < 0$ ) representa una superposición coherente de distintos momentos  $p_+$ . El momento no es el observable monitoreado por el entorno, pero debido a la evolución libre del sistema después de un tiempo  $\tau/4$  cualquier superposición en momento se transforma en una superposición en posición, y es en tiempos de ese orden que el entorno afecta la coherencia del sistema (ver figura 6.22).

En la figura 6.21 se observa además que las oscilaciones en la discordia persisten para tiempos largos, lo cuál está de acuerdo con el análisis del estado asintótico, debido al valor no nulo de  $r_{crit}$ . En la figura 6.23 se muestra la evolución de la discordia para distintas temperaturas. La amplitud de las oscilaciones se anula para altas temperaturas. Por último, en la figura 6.24 se compara la evolución de la discordia y el entrelazamiento para una elección de  $T$  y  $r$  tal que el estado asintótico corresponde a la fase SDR. Se observa que en los intervalos donde el entrelazamiento muere la discordia alcanza máximos locales.

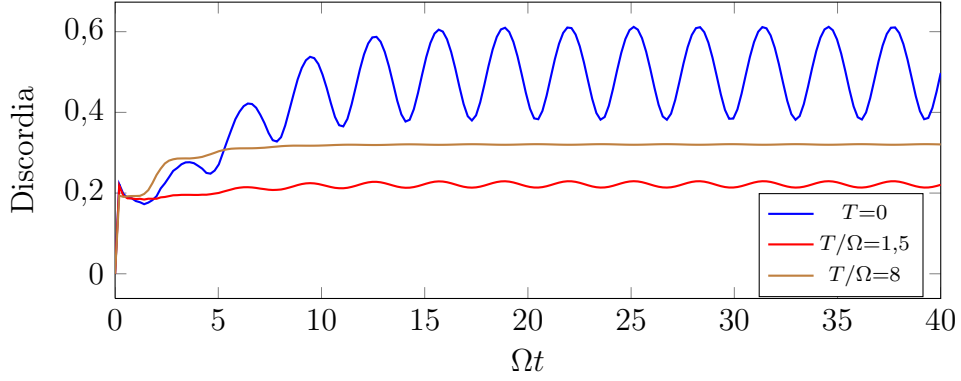


Figura 6.23: Evolución de la discordia para distintas temperaturas y un estado inicial separable con  $r = 1$ . Entorno óhmico con acoplamiento en posición. Los parámetros del entorno son  $\Lambda = 20$  y  $\gamma = 0,1$ . Los parámetros del sistema son  $M = 1$ ,  $\Omega = 1$  y  $C_{12} = 0$ .

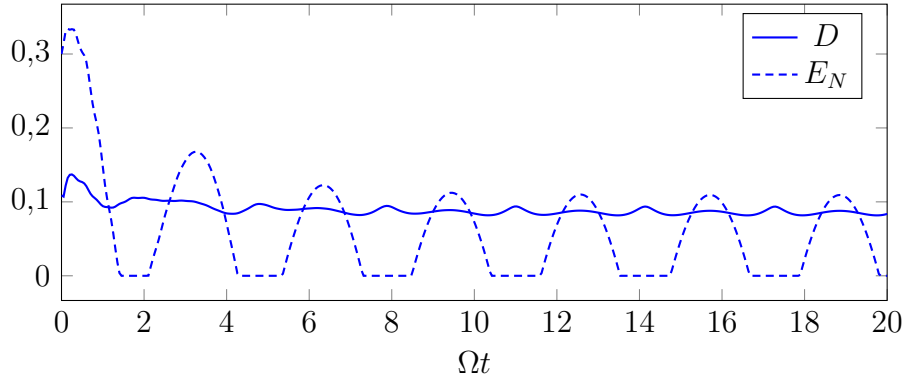


Figura 6.24: Evolución de la discordia y la negatividad logarítmica para  $T = 0,35$  y un estado inicial entrelazado con  $r = 0,15$ . Entorno óhmico con acoplamiento en posición. Los parámetros del entorno son  $\Lambda = 20$  y  $\gamma = 0,1$ . Los parámetros del sistema son  $M = 1$ ,  $\Omega = 1$  y  $C_{12} = 0$ .

# Capítulo 7

## Conclusiones

En esta tesis se ha estudiado la evolución de las correlaciones cuánticas en un sistema bipartito abierto. Se consideró un modelo sencillo en el cual sistema y entorno están formados por osciladores armónicos. A pesar de su simplicidad, resultados previos donde se estudia la evolución del entrelazamiento en el mismo sistema indican que las correlaciones cuánticas presentan una amplia variedad de comportamientos[2]. Este trabajo se centró principalmente en la evolución de la discordia cuántica, una nueva medida de correlaciones más general que incluye al entrelazamiento. Si bien todavía no se conoce una forma de calcular la discordia en sistemas de variable continua, pocos meses antes de comenzar este trabajo fue presentada una aproximación llamada ‘discordia gaussiana’. Esta fue la medida de correlaciones utilizada, cuya evolución y comportamiento se comparó con los resultados conocidos sobre el entrelazamiento.

En primer lugar se analizaron las correlaciones cuánticas del sistema en el estado asintótico, es decir en el estado de equilibrio con el entorno. Se encontró que para entornos a alta temperatura la discordia gaussiana es una función creciente de la temperatura, y que está acotada por un valor que coincide con la entropía máxima de un sistema de dos niveles. Esto sucede independientemente de cuales sean las correlaciones presentes en el estado inicial. Este comportamiento es muy diferente de lo que sucede con el entrelazamiento, ya que el mismo siempre desaparece para temperaturas suficientemente altas. También se analizó qué tipo de medición minimiza la discordia del estado asintótico. Se mostró que si el estado inicial es mixto disminuye el máximo valor que puede alcanzar la discordia para altas temperaturas del entorno. Por último, mediante simulaciones numéricas se estudió la evolución temporal exacta de las correlaciones cuánticas desde el estado inicial hasta que se alcanza el equilibrio, encontrando acuerdo con las predicciones que surgen del análisis del estado asintótico.

Los resultados obtenidos plantean algunos interrogantes. El análisis previo sobre el entrelazamiento muestra que la acción de un entorno común es capaz de crear correlaciones cuánticas entre las partes del sistema, aún cuando en el estado inicial estas estén completamente descorrelacionadas. Sin embargo, esto sucede sólo cuando la temperatura del entorno es baja. El hecho de que la discordia gaussiana del estado asintótico para altas temperaturas no sólo no se anule, sino que crezca con la temperatura hasta cierto valor máximo es sumamente anti-intuitivo. Probablemente este comportamiento sea un indicador de que la discordia gaussiana no es una buena aproximación a la discordia. En principio la discordia gaussiana sólo provee una cota máxima de las correlaciones cuánticas. Esto se debe a que la optimización sobre todas las mediciones posibles sobre un subsistema que se requiere para el cálculo de la discordia es restringida solamente al conjunto de las mediciones gaussianas. Hasta el momento no existe ninguna prueba de que las mediciones gaussianas minimicen la discordia de estados gaussianos. Tampoco existe un contraejemplo.

Pocos días después de haber comenzado esta tesis fue presentado un trabajo en el que se estudiaba la evolución de la discordia y otras medidas de correlaciones para el mismo modelo[38]. En ese trabajo se observan comportamientos similares a los presentados aquí, pero el análisis tiene algunos puntos débiles. En primer lugar la evolución del estado del sistema no se resuelve exactamente sino que se utiliza la aproximación de acoplamiento débil. En esta aproximación no se observan comportamientos interesantes como por ejemplo la generación de entrelazamiento a partir de un estado inicial separable para temperaturas bajas. Sólo se observan oscilaciones temporales de las correlaciones cuando el cut-off es menor que la frecuencia característica del sistema, la cual es una situación no física. Además sólo se analiza la evolución de las correlaciones a tiempos cortos y no las presentes en el estado asintótico. Tampoco se analiza cuál es el efecto de la temperatura del entorno: todos los resultados presentados corresponden al caso de alta temperatura. El trabajo realizado durante esta tesis supera estos puntos y hasta el momento es el análisis más completo del comportamiento de la discordia en sistemas abiertos de variable continua.

Como trabajo pendiente quizás lo más interesante sea tratar de investigar hasta qué punto la discordia gaussiana aproxima a la discordia general. Una forma de hacer esto podría ser intentar expresar en términos de los estados gaussianos bipartitos alguna condición necesaria y suficiente para la nulidad de la discordia, como por ejemplo la condición dada por Shabani y Lidar en [31]. La discordia gaussiana se anula si y sólo si no existe ningún tipo de correlaciones entre los subsistemas, lo cual en principio parece una condición demasiado restrictiva. Otro punto pendiente es el de analizar, al menos

numéricamente, cómo se modifican los resultados si se consideran estados iniciales donde sistema y entorno están correlacionados, o si los osciladores del sistema no son resonantes.



# Apéndice A

## Ecuaciones maestras

### Forma general de un propagador gaussiano

La forma mas general para una función gaussiana de las coordenadas  $\{x, x', x_0, x'_0\}$  es:

$$J(x, x', t|x_0, x'_0, t_0) = A \exp \left\{ (X \ Y \ X_0 \ Y_0) \begin{pmatrix} B & F & G & K \\ F & C & L & M \\ G & L & D & N \\ K & M & N & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{A.1})$$

donde se utilizan las coordenadas  $X = x + x'$ ,  $Y = x - x'$ ,  $X_0 = x_0 + x'_0$  y  $Y_0 = y_0 + y'_0$ . La dependencia temporal esta contenida en los coeficientes  $A \dots N$ . No toda función de esta forma se corresponde con una evolución temporal válida. En principio deben cumplirse estas dos condiciones:

1. Se preserva la hermiticidad, es decir:

$$\rho_S^\dagger(0) = \rho_S(0) \quad \Rightarrow \quad \rho_S^\dagger(t) = \rho_S(t) \quad (\text{A.2})$$

2. Se preserva la traza:

$$\text{Tr}(\rho_S(t)) = \text{Tr}(\rho_S(0)) \quad (\text{A.3})$$

Estas condiciones permiten restringir los coeficientes  $A \dots N$ . De la condición (1) se deduce que los coeficientes  $F, K, L$  y  $N$  son imaginarios y el resto son reales. De la condición (2) surge  $B = D = G = 0$  y  $A = -iK/(2\pi)$ . Por lo tanto el propagador gaussiano más general que respete estas condiciones puede ser escrito así:

$$J(X, Y, t|X_0, Y_0, t_0) = \frac{b_3}{2\pi} e^{-a_{11}Y^2 - a_{12}Y Y_0 - a_{22}Y_0^2} \times e^{i(b_1XY + b_2X_0Y - b_3XY_0 - b_4X_0Y_0)} \quad (\text{A.4})$$

A partir de este propagador se puede obtener la siguiente ecuación maestra:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & \frac{i}{2\hbar}\alpha[\hat{p}, \{\hat{x}, \rho\}] + i\beta[x^2, \rho] - \gamma[\hat{x}, [\hat{x}, \rho]] + \\ & + \frac{i\alpha'}{2\hbar}[\hat{x}, \{\hat{p}, \rho\}] + \frac{\delta}{2\hbar}[\hat{x}, [\hat{p}, \rho]] - \frac{\gamma'}{4\hbar^2}[\hat{p}, [\hat{p}, \rho]] + \frac{i\beta'}{4\hbar^2}[\hat{p}^2, \rho] \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Donde los coeficientes son:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\dot{b}_3}{b_3} - \frac{\dot{b}_4 b_1}{b_3 b_2} \\ \beta &= \dot{b}_1 - \left( \frac{\dot{b}_2}{b_2} + \frac{\dot{b}_3}{b_3} \right) b_1 + \frac{\dot{b}_4 b_1^2}{b_3 b_2} \\ \gamma &= \dot{a}_{11} - \dot{b}_2 \frac{a_{12} b_1}{b_2 b_3} + \dot{a}_{12} \frac{b_1}{b_3} - \dot{a}_{22} \left( \frac{b_1}{b_3} \right)^2 + \dot{b}_4 \frac{a_{12}}{b_2} \left( \frac{b_1}{b_3} \right)^2 - \frac{\dot{b}_2}{b_2} a_{11} + 2\dot{b}_4 \frac{a_{11} b_1}{b_2 b_3} \\ \delta &= -\dot{b}_2 \frac{a_{12}}{b_2 b_3} + \frac{\dot{a}_{12}}{b_3} + \dot{a}_{22} \frac{2b_1}{b_3^2} + \dot{b}_4 \frac{2a_{12} b_1}{b_2 b_3^2} + 2 \frac{\dot{b}_4 a_{11}}{b_3 b_2} \\ \alpha' &= \frac{\dot{b}_2}{b_2} - \frac{\dot{b}_4 b_1}{b_2 b_3} \\ \beta' &= \frac{\dot{b}_4}{b_3 b_2} \\ \gamma' &= \frac{\dot{a}_{22}}{b_3^2} + \frac{\dot{b}_4 a_{12}}{b_2 b_3^2} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

## Ecuación maestra para el movimiento browniano cuántico con acoplamiento simétrico en posición y momento

Se considera el hamiltoniano  $H = H_S + H_E + H_{int}$ , con:

$$\begin{aligned} H_S &= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \\ H_E &= \sum_{n=1}^N \frac{\pi_n^2}{2m_n} + \frac{m_n \omega_n^2 q_n^2}{2} \\ H_{int} &= x \sum_{n=1}^N c_n q_n + \frac{p}{m\omega} \sum_{n=1}^N \tilde{c}_n \frac{\pi_n}{m_n \omega_n} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Cuando  $c_n = \tilde{c}_n$  se obtiene la siguiente ecuación maestra para  $\rho_S$ :

$$\dot{\rho}(t) = \frac{1}{i} [H_S + \delta\tilde{\Omega}^2(t)H_R, \rho(t)] - \tilde{D}(t)([x, [x, \rho]] + \frac{1}{m\omega^2}[p, [p, \rho]]) - i\tilde{\gamma}(t)([x, \{p, \rho\}] - [p, \{x, \rho\}]) \quad (\text{A.8})$$

Donde  $H_R = \frac{p^2}{2m\omega^2} + \frac{mx^2}{2}$ . Los coeficientes son:

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\Omega}^2(t) &= \frac{2}{m} \int_0^t \tilde{\eta}(t') \sin(\omega t') - \eta(t') \cos(\omega t') dt' \\ \tilde{\gamma}(t) &= \frac{1}{m\omega} \int_0^t \tilde{\eta}(t') \cos(\omega t') + \eta(t') \sin(\omega t') dt' \\ \tilde{D}(t) &= \int_0^t \tilde{\nu}(t') \sin(\omega t') + \nu(t') \cos(\omega t') dt' \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Los núcleos  $\eta(t)$  y  $\nu(t)$  son los mismos que en el caso de acoplamiento en posición (ecuación 2.15), mientras que  $\tilde{\eta}(t)$  y  $\tilde{\nu}(t)$  son<sup>1</sup>:

$$\tilde{\eta}(t) = \int_0^\infty J(\omega) \cos(\omega t) d\omega \quad \tilde{\nu}(t) = \int_0^\infty J(\omega) \coth\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) \sin(\omega t) d\omega \quad (\text{A.10})$$

Siendo  $J(\omega)$  la densidad espectral del entorno (ecuación 2.16). A partir de la ecuación maestra se derivan las siguientes ecuaciones de evolución para los segundos momentos de  $x$  y  $p$ :

$$\begin{aligned} d_t \langle p^2 \rangle &= -M(t)\Omega_R^2(t) \langle \{x, p\} \rangle - 4\tilde{\gamma}(t) \langle p^2 \rangle + 2\tilde{D}(t) \\ d_t \langle x^2 \rangle &= \frac{1}{M(t)} \langle \{x, p\} \rangle - 4\tilde{\gamma}(t) \langle x^2 \rangle + 2\frac{\tilde{D}(t)}{M^2(t)\Omega^2(t)} \\ d_t \langle \{x, p\} \rangle &= \frac{2}{M(t)} \langle p^2 \rangle - 2M(t)\Omega_R^2(t) \langle q^2 \rangle - 4\tilde{\gamma}(t) \langle \{x, p\} \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

## Estado asintótico general

Resulta conveniente calcular primero la matriz de covarianza en función de las coordenadas  $(x_+, p_+, x_-, p_-)$ , con  $x_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 \pm x_2)$  y  $p_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 \pm p_2)$ , y luego hacer el cambio de base a las coordenadas  $(x_1, p_1, x_2, p_2)$ .

La evolución libre del modo  $-$  está representada en el espacio de fases dado por las coordenadas  $(x_-, p_-)$  mediante la rotación:

$$E(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_- t) & \frac{1}{m_- \omega_-} \sin(\omega_- t) \\ -m_- \omega_- \sin(\omega_- t) & \cos(\omega_- t) \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

<sup>1</sup>Estas expresiones son válidas a 2<sup>do</sup> orden en las constantes de acoplamiento

Siempre puede elegirse el instante inicial de modo que  $Cov(x_-, p_-) = 0$ , es decir que la matriz de covarianza del modo  $-$  sea diagonal:  $\sigma_-(0) = \begin{pmatrix} (\Delta x_-)^2 & 0 \\ 0 & (\Delta p_-)^2 \end{pmatrix}$ . Por lo tanto la matriz de covarianza para el modo  $-$  en un tiempo  $t$  arbitrario será:

$$\sigma_-(t) = E(t)\sigma_-(0)E^T(t) = \begin{pmatrix} a(t) & c(t) \\ c(t) & b(t) \end{pmatrix} \quad (\text{A.13})$$

donde los elementos de matriz son:

$$\begin{aligned} a(t) &= \cos^2(\omega_- t)(\Delta x_-)^2 + \sin^2(\omega_- t) \left( \frac{\Delta p_-}{m_- \omega_-} \right)^2 \\ b(t) &= (m_- \omega_- \Delta x_-)^2 \sin^2(\omega_- t) + (\Delta p_-)^2 \cos^2(\omega_- t) \\ c(t) &= \cos(\omega_- t) \sin(\omega_- t) \left( \frac{(\Delta p_-)^2}{m_- \omega_-} - m_- \omega_- (\Delta x_-)^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

La matriz de covarianza del modo  $+$  en el estado asintótico está dada por las ecuaciones 2.19 o 2.23, según sea el acoplamiento en posición o simétrico. Por lo tanto:

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} (\Delta x_+)^2 & 0 \\ 0 & (\Delta p_+)^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

A partir de la ecuación maestra se puede ver que las correlaciones entre el modo  $+$  y el modo  $-$  se anulan en el estado asintótico<sup>2</sup>. Por lo tanto la matriz de covarianza para las coordenadas  $(x_+, p_+, x_-, p_-)$  es:

$$\sigma_{\pm}(t) = \begin{pmatrix} (\Delta x_+)^2 & & & \\ & (\Delta p_+)^2 & & \\ & & a(t) & c(t) \\ & & c(t) & b(t) \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

Y haciendo el cambio de base a las coordenadas  $(x_1, p_1, x_2, p_2)$ , dado por la matriz  $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix}$  se obtiene la matriz de covarianza:

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= A\sigma_{\pm}A^T = \\ &= \begin{pmatrix} (\Delta x_+)^2 + a(t) & c(t) & (\Delta x_+)^2 - a(t) & -c(t) \\ c(t) & (\Delta p_+)^2 + b(t) & -c(t) & (\Delta p_+)^2 - b(t) \\ (\Delta x_+)^2 - a(t) & -c(t) & (\Delta x_+)^2 + a(t) & c(t) \\ -c(t) & (\Delta p_+)^2 - b(t) & c(t) & (\Delta p_+)^2 + b(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

---

<sup>2</sup>Se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales lineales para los elementos de matriz de la forma  $\dot{v} = Cv$ , donde los autovalores de la matriz  $C$  siempre tienen parte real negativa.

# Apéndice B

## Propiedades de la discordia

Aquí se repasan las demostraciones dadas en [1] en relación a las propiedades básicas de la discordia, para el caso en que se realizan mediciones proyectivas sobre espacios unidimensionales. Las diferencias que aparecen para mediciones más generales son comentadas en [1]. La notación es la misma que la de los capítulos 3 y 4.

**Lema 1.** *Sean las probabilidades  $\{p_m\}$  y los estados  $\{\rho_m\}$  con soporte en subespacios ortogonales ( $\rho_m\rho_n = 0$  si  $m \neq n$ ). Entonces:*

$$S\left(\sum_m p_m \rho_m\right) = H(\{p_m\}) + \sum_m p_m S(\rho_m)$$

La demostración se puede consultar en [19].

**Lema 2.** *Sea un estado  $\rho_S$  y  $\rho_S^M = \sum_m \Pi_m^B \rho_S \Pi_m^B$  la matriz densidad que resulta de realizar la medición  $\Pi_m^B = \mathbb{1} \otimes M_m$  sobre el sistema  $B$ , siendo  $\{M_m\}$  proyectores unidimensionales. Entonces*

$$S(A|B)_{\{M_m\}} = S(\rho_S^M) - S(\rho_B^M) \quad (\text{B.1})$$

donde  $\rho_B^M = \text{Tr}_A(\rho_S^M)$ .

Es decir que la entropía condicional local definida en 4.15 para una medición  $\{M_m\}$  es igual a la entropía condicional cuántica (ecuación 3.12) sobre la matriz densidad que resulta luego de la medición.

*Demostración.*  $\rho_S^M = \sum_m \Pi_m^B \rho_S \Pi_m^B = \sum_m p_m \rho_m$  con  $p_m = \text{Tr}(\Pi_m^B \rho_S \Pi_m^B)$  y  $\rho_m = \frac{1}{p_m} \Pi_m^B \rho_S \Pi_m^B$ . Si los proyectores  $\{M_m\}$  son ortogonales vale que  $\rho_m \rho_n = 0$  si  $m \neq n$ . Entonces, según el lema 1:

$$S(\rho_S^M) = H(\{p_m\}) + \sum_m p_m S(\rho_m)$$

Además  $S(\rho_m) = S(\rho_{A|m} \otimes M_m) = S(\rho_{A|m})$  pues  $S(M_m) = 0$ . Por otro lado,  $\rho_B^M = \sum_m p_m M_m$  y por lo tanto  $H(\{p_m\}) = S(\rho_B^M)$ . Entonces se tiene:

$$\begin{aligned} S(\rho_S^M) &= H(\{p_m\}) + \sum_m p_m S(\rho_m) \\ &= H(\rho_B^M) + \sum_m p_m S(\rho_{A|m}) \end{aligned}$$

El último término coincide con la definición de  $S(A|B)_{\{M_m\}}$  (ecuación 4.15), por lo que se obtiene B.1.  $\square$

**Lema 3.** Con  $\rho_S$  y  $\rho_S^M$  como en el lema anterior, vale que:

$$\rho_S^M = \sum_i p_i U_i \rho_S U_i^\dagger \quad (\text{B.2})$$

Donde  $\{p_i\}$  es una distribución de probabilidad y  $U_i$  es un conjunto de operadores unitarios locales.

La demostración es la generalización directa del ejercicio 11.20 de [19]. Además en este caso se puede ver que como la medición que se efectúa sobre  $\rho_S$  es una medición local, los operadores  $U_i$  también son locales.

**Teorema 1.**  $\vec{D}(A : B)_{\{M_m\}} \geq 0$ .

*Demostración.* A partir del lema 2 se tiene que:

$$\begin{aligned} \vec{D}(A : B)_{\{M_m\}} &= S(A|B)_{M_m} - (S(A, B) - S(B)) \\ &= S(\rho_S^M) - S(\rho_B^M) - (S(\rho_S) - S(\rho_B)) \\ &= S(A|B)_{\rho_S^M} - S(A|B)_{\rho_S} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

A partir de la concavidad de la entropía condicional  $S(A|B)$  (ecuación 3.16) y de la descomposición B.2 para  $\rho_S^M$  se tiene:

$$S(A|B)_{\rho_S^M} \geq \sum_i p_i S(A|B)_{U_i \rho_S U_i} \quad (\text{B.4})$$

Pero  $S(A|B)_{U_i \rho_S U_i} = S(A|B)_{\rho_S}$  debido a que las transformaciones  $U_i$  son unitarias y locales. Por lo tanto  $S(A|B)_{\rho_S^M} \geq S(A|B)_{\rho_S}$  y entonces  $\vec{D} \geq 0$ .  $\square$

**Teorema 2.** La discordia se anula si y solo si existe una medición local que no perturbe el estado, es decir:

$$\vec{D}(A : B)_{\{M_m\}} = 0 \iff \rho_S = \rho_S^M = \sum_m \Pi_m^B \rho_S \Pi_m^B \quad (\text{B.5})$$

Para ciertos proyectores  $M_m$ , con  $\Pi_m^B = \mathbb{1} \otimes M_m^B$ .

*Demostración.* La implicación  $\Leftarrow$  es trivial a partir del lema 2. Para probar la otra implicación se puede escribir sin pérdida de generalidad:

$$\rho_S = \rho_S^M + \rho' = \sum_m \Pi_m^B \rho_S \Pi_m^B + \rho' \quad (\text{B.6})$$

Lo que se desea probar es que  $\rho' = 0$ , dado que  $\vec{D}(A : B)_{\{M_m\}} = 0$ . Las matrices  $\rho_S$  y  $\rho_S^M$  son iguales dentro de los subespacios sobre los cuales proyectan los operadores  $\Pi_m^B$ , y por lo tanto  $\rho'$  se anula en los mismos. Si  $\{|a_i\rangle\}$  es una base de A y  $\{|b_p^m\rangle\}$  es la base del subespacio de B sobre el cual proyecta  $M_m$ , entonces las componentes de  $\rho'$  son  $(\rho')_{ij,pq}^{mn} = \langle b_p^m a_i | \rho' | b_q^n a_j \rangle$ , que por lo anterior se anulan para  $m = n$ . Para  $m \neq n$  las componentes de  $\rho_S^M$  son nulas y por lo tanto  $(\rho_S)_{ij,pq}^{mn} = (\rho')_{ij,pq}^{mn}$ . Si fuera  $\rho' \neq 0$  entonces se tiene que  $(\rho')_{ij,pq}^{mn} \neq 0$  para ciertos  $\{i, j, p, q, m, n\}$ . Siempre se puede suponer que  $i \neq j$ , ya que estas componentes pueden ser mezcladas mediante un cambio de base de A que no afecta el valor de la discordia. Se considera la matriz densidad  $\hat{\rho}_S$  que resulta de remover en  $\rho_S$  el elemento no nulo  $\{i, j, p, q, m, n\}$  y su complejo conjugado. De forma similar al resultado del lema 3, es posible obtener  $\hat{\rho}_S$  mezclando distintas transformaciones unitarias de  $\rho_S$ . En particular, vale que  $\hat{\rho}_S = \frac{1}{2}(\rho_S + U\rho_S U)$ , donde  $U$  es la transformación unitaria que cambia el signo del elemento  $\{i, j, p, q, m, n\}$ . Por la concavidad de la entropía se tiene  $S(\hat{\rho}_S) > S(\hat{\rho})$  y, como el elemento que se removió no está sobre la diagonal ( $i \neq j$ ) vale que  $\hat{\rho}_B = \text{Tr}_A(\hat{\rho}_S) = \text{Tr}_A(\rho_S) = \rho_B$ . Entonces:

$$S(\rho_S) - S(\rho_B) < S(\hat{\rho}_S) - S(\hat{\rho}_B) \quad (\text{B.7})$$

Y además, debido a la concavidad de la entropía condicional:

$$S(\hat{\rho}_S) - S(\hat{\rho}_B) \leq S(\rho_S^M) - S(\rho_B^M) \quad (\text{B.8})$$

Por lo tanto se obtiene que  $\vec{D}(A : B)_{\{M_m\}} > 0$ , lo cual contradice que  $\vec{D}(A : B)_{\{M_m\}} = 0$ .  $\square$

# Apéndice C

## Estados gaussianos

### Representación unitaria de transformaciones simplécticas

Aquí se muestra que las transformaciones simplécticas en el espacio de fases están relacionadas con las transformaciones unitarias generadas por polinomios de 2<sup>do</sup> orden los operadores de posición y momento. Usando la notación del capítulo 5, se llama  $R = (\hat{q}_1, \hat{p}_1, \hat{q}_2, \hat{p}_2, \dots, \hat{q}_N, \hat{p}_N)^T$  al vector que agrupa los operadores de posición y momento. Si  $f(R)$  es un polinomio de 2<sup>do</sup> orden<sup>1</sup> en los operadores  $R_k$  se puede ver que la transformación unitaria  $U = e^{if(R)}$  transforma cada operador  $R_k$  en una combinación lineal de todos los demás, es decir:

$$R'_k = UR_kU^\dagger = \sum_l C_{kl}R_l \quad (\text{C.1})$$

donde  $C_{kl}$  son algunos coeficientes que se agrupan en una matriz  $C$ . Esto se deduce fácilmente aplicando el lema de Hadamard<sup>2</sup>. Además, como la transformación  $U$  es unitaria se tiene que  $[R'_k, R'_l] = U[R_k, R_l]U^\dagger = i\Omega$  (ver ecuación 5.5). Por otro lado, según la ecuación C.1 se tiene que  $[R'_k, R'_l] = \sum_{m,n} C_{km}[R_m, R_n]C_{ln} = i(C\Omega C^T)_{kl}$ . Por lo tanto  $C\Omega C^T = \Omega$  y entonces la matriz  $C$  que representa la transformación  $U$  en el espacio de fases dado por las cuadraturas  $R_i$  es una transformación simpléctica. Además, a partir de la relación lineal entre  $R'$  y  $R$  se puede ver que si  $\rho$  es un estado gaussiano  $\rho' = U\rho U^\dagger$  también lo es.

---

<sup>1</sup>No se consideran términos lineales en  $f$ , los cuales solo generan desplazamientos. Además los coeficientes deben ser tales que  $f$  sea hermitico.

<sup>2</sup> $e^X Y e^{-X} = Y + [X, Y] + \frac{1}{2!}[X, [X, Y]] + \frac{1}{3!}[X, [X, [X, Y]]] + \dots$



## Autovalores simplécticos

Los autovalores simplécticos de una matriz de covarianza  $\sigma$  de  $N$  modos se pueden calcular como el módulo de los autovalores ordinarios de la matriz  $i\Omega\sigma$ . La demostración es como sigue. Si  $\nu = \text{diag}(\nu_1, \nu_1, \nu_2, \nu_2, \dots, \nu_N, \nu_N)$  es la forma normal de  $\sigma$ , entonces  $\sigma = S^T \nu S$  para alguna transformación simpléctica  $S$ . Como  $S$  es simpléctica,  $S^{-1T}$  también lo es y entonces  $\Omega = S^{-1} \Omega S^{-1T}$ . Multiplicando las últimas dos igualdades se obtiene que  $\Omega\sigma = S^{-1} \Omega \nu S$ . Entonces las matrices  $\Omega\sigma$  y  $\Omega\nu$  están relacionadas mediante un cambio de base y por lo tanto sus autovalores son los mismos. A partir de la ecuación 5.5 se ve que los autovalores de  $\Omega\nu$  son  $\{\pm i\nu_k\}$ , lo que completa la demostración.

## Estados térmicos estrujados

La matriz de covarianza que resulta de aplicar la transformación 5.73 a un estado térmico descorrelacionado representado por la matriz de covarianza  $\sigma_0 = \begin{pmatrix} \nu_1 \mathbb{1} & \\ & \nu_2 \mathbb{1} \end{pmatrix}$  es:

$$\sigma = S(r)\sigma_0 S(r) = \begin{pmatrix} a & & c \\ & a & -c \\ c & & b \\ & -c & b \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

donde:

$$\begin{aligned} a &= \nu_1 \cosh^2(r) + \nu_2 \sinh^2(r) \\ b &= \nu_1 \sinh^2(r) + \nu_2 \cosh^2(r) \\ c &= -(\nu_1 + \nu_2) \sinh(r) \cosh(r) \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

## Agradecimientos:

- A MIS VIEJOS, POR TODO. Imposible terminar de agradecerles la infinita comprensión y aliento.
- A Juan Pablo Paz, por dirigirme y por toda la confianza y el apoyo.
- A Augusto, Ariel, Christian, Gaby y Miguel, por la MUY buena onda y la ayuda.
- A mis hermanas y abuelos, por bancarme e interesarse en lo que hago. Al resto de mi familia, que veo menos pero que está ahí.
- A Sabri por todo el cariño y aguante.
- A mis amigos, por bancarse y entender que pase tanto tiempo estudiando. A Fer, Diego, Dieguito, Luis, Germán y Charly. A los demás que tengo abandonados.
- A mis compañeros por todos los buenos momentos de estos años. En especial a Mario, Fede, Ari, Fer, Gaby, Sabri, Julian y Marian.
- A los excelentes profesores que me tocó tener. En especial a Diego Mazzitelli y Ricardo Piegai, por transmitir lo que transmiten.
- A la educación pública y a la FCEyN.

# Bibliografía

- [1] Harold Ollivier and Wojciech H. Zurek. Quantum discord: A measure of the quantumness of correlations. *Physical Review Letters*, 88(1):017901+, December 2001.
- [2] Juan P. Paz and Augusto J. Roncaglia. Dynamical phases for the evolution of the entanglement between two oscillators coupled to the same environment. *Physical Review A*, 79(3):032102+, March 2009.
- [3] Andrew Steane. Quantum computing. *Reports on Progress in Physics*, 61(2):117–173, February 1998.
- [4] Guifré Vidal. Efficient Classical Simulation of Slightly Entangled Quantum Computations. *Physical Review Letters*, 91(14):147902+, October 2003.
- [5] E. Knill and R. Laflamme. Power of One Bit of Quantum Information. *Physical Review Letters*, 81(25):5672–5675, December 1998.
- [6] Gerardo Adesso and Animesh Datta. Quantum versus classical correlations in gaussian states. *Physical Review Letters*, 105(3):030501+, July 2010.
- [7] Augusto Roncaglia. *Dinámica de las correlaciones durante el proceso de decoherencia*. PhD thesis, Universidad de Buenos Aires, 2009.
- [8] Juan P. Paz and Augusto J. Roncaglia. Dynamics of the entanglement between two oscillators in the same environment. *Physical Review Letters*, 100(22):220401+, June 2008.
- [9] A. Caldeira and A. Leggett. Path integral approach to quantum brownian motion1. *Physica A: Statistical and Theoretical Physics*, 121(3):587–616, September 1983.
- [10] W. G. Unruh and W. H. Zurek. Reduction of a wave packet in quantum brownian motion. *Physical Review D*, 40(4):1071–1094, August 1989.

- [11] B. L. Hu, Juan P. Paz, and Yuhong Zhang. Quantum brownian motion in a general environment: Exact master equation with nonlocal dissipation and colored noise. *Physical Review D*, 45(8):2843–2861, April 1992.
- [12] Wojciech H. Zurek, Salman Habib, and Juan P. Paz. Coherent states via decoherence. *Physical Review Letters*, 70(9):1187–1190, March 1993.
- [13] Juan Paz and Wojciech Zurek. Environment-Induced decoherence and the transition from quantum to classical. In Dieter Heiss, editor, *Fundamentals of Quantum Information*, volume 587 of *Lecture Notes in Physics*, chapter 4, pages 77–148. Springer Berlin / Heidelberg, Berlin, Heidelberg, August 2002.
- [14] Gabriela Petrunaro. Tesis de licenciatura, en preparación. 2011.
- [15] R. Feynman and F. Vernon. The theory of a general quantum system interacting with a linear dissipative system. *Annals of Physics*, 24:118–173, October 1963.
- [16] Eric Jones, Travis Oliphant, Pearu Peterson, et al. SciPy: Open source scientific tools for Python, 2001–.
- [17] Alfred Wehrl. General properties of entropy. *Reviews of Modern Physics*, 50(2):221–260, April 1978.
- [18] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *SIGMOBILE Mob. Comput. Commun. Rev.*, 5(1):3–55, January 2001.
- [19] Michael A. Nielsen, Isaac Chuang, and Lov K. Grover. Quantum Computation and Quantum Information. *American Journal of Physics*, 70(5):558+, 2002.
- [20] Asher Peres. Quantum Theory: Concepts and Methods. *American Journal of Physics*, 63(3):285+, 1995.
- [21] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Physical Review Online Archive (Prola)*, 47(10):777–780, May 1935.
- [22] John S. Bell. On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. *Physics*, 1:195–200, 1964.
- [23] Asher Peres. Separability Criterion for Density Matrices. *Physical Review Letters*, 77(8):1413–1415, August 1996.

- [24] R. Simon. Peres-Horodecki Separability Criterion for Continuous Variable Systems. *Physical Review Letters*, 84(12):2726–2729, March 2000.
- [25] Martin B. Plenio and S. Virmani. An introduction to entanglement measures. *Quantum Inf. Comput.*, June 2007.
- [26] Animesh Datta, Anil Shaji, and Carlton M. Caves. Quantum Discord and the Power of One Qubit. *Physical Review Letters*, 100(5):050502+, February 2008.
- [27] L. Henderson and V. Vedral. Classical, quantum and total correlations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 34(35):6899+, September 2001.
- [28] D. Cavalcanti, L. Aolita, S. Boixo, K. Modi, M. Piani, and A. Winter. Operational interpretations of quantum discord. *Physical Review A*, 83(3):032324+, March 2011.
- [29] Vaibhav Madhok and Animesh Datta. Interpreting quantum discord through quantum state merging. *Physical Review A*, 83(3):032323+, March 2011.
- [30] Michal Horodecki, Jonathan Oppenheim, and Andreas Winter. Partial quantum information. *Nature*, 436(7051):673–676, August 2005.
- [31] Alireza Shabani and Daniel A. Lidar. Vanishing quantum discord is necessary and sufficient for completely positive maps. *Physical Review Letters*, 102(10):100402+, March 2009.
- [32] Géza Giedke and J. Ignacio Cirac. Characterization of gaussian operations and distillation of gaussian states. *Physical Review A*, 66(3):032316+, September 2002.
- [33] U. Leonhardt. Measuring the quantum state of light. *Measurement Science and Technology*, 11(12):1827+, December 2000.
- [34] U. Leonhardt. Measuring the quantum state of light. *Progress in Quantum Electronics*, 19(2):89–130, 1995.
- [35] Paolo Giorda and Matteo G. A. Paris. Gaussian quantum discord. *Phys. Rev. Lett.*, 105(2):020503, Jul 2010.
- [36] Shunlong Luo. Quantum discord for two-qubit systems. *Physical Review A*, 77(4):042303+, April 2008.

- [37] D. Girolami and G. Adesso. Quantum discord for general two-qubit states: Analytical progress. *ArXiv e-prints*, March 2011.
- [38] Ruggero Vasile, Paolo Giorda, Stefano Olivares, Matteo G. A. Paris, and Sabrina Maniscalco. Nonclassical correlations in non-markovian continuous-variable systems. *Phys. Rev. A*, 82(1):012313, Jul 2010.
- [39] Ladislav Mišta, Richard Tatham, Davide Girolami, Natalia Korolkova, and Gerardo Adesso. Measurement-induced disturbances and nonclassical correlations of gaussian states. *Phys. Rev. A*, 83(4):042325, Apr 2011.
- [40] Jia-sen Jin, Chang-shui Yu, Pei Pei, and He-shan Song. Quantum discord induced by white noises. *J. Opt. Soc. Am. B*, 27(9):1799–1803, September 2010.
- [41] T. Werlang, S. Souza, F. F. Fanchini, and C. J. Villas Boas. Robustness of quantum discord to sudden death. *Physical Review A*, 80(2):024103+, August 2009.
- [42] Juan P. Paz, Salman Habib, and Wojciech H. Zurek. Reduction of the wave packet: Preferred observable and decoherence time scale. *Physical Review D*, 47(2):488–501, January 1993.