# TEMAS DE FÍSICA PARA MATEMÁTICOS

## 1er. cuatrimestre 2013

## 6 - Ondas y radiación

**Problema 1:**
Demostrar que la ecuación
$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$
admite soluciones de la forma $f(x,t) = f^-(t - x/c) + f^+(t + x/c)$. Ayuda: es conveniente pasar a las variables $u$ y $v$ definidas por $t = u + v$, $x = c(u - v)$.

**Problema 2:**
Determinar cuáles de las siguientes expresiones describen ondas viajeras:

$$\begin{aligned}
\psi(y,t) &= e^{-(a^2y^2+b^2t^2-2abty)} \\
\psi(z,t) &= A\,sen(az^2 - bt^2) \\
\psi(x,t) &= A\,sen\left(\frac{x}{a} + \frac{t}{b}\right)^2 \\
\psi(x,t) &= A\,cos^2(t - x)
\end{aligned}$$

**Problema 3:**
¿Cuántas longitudes de onda de luz amarilla ($\lambda = 580$ nm) caben en una distancia igual al espesor de una hoja de papel ($\sim 0.1$ mm)? ¿Cuántas de microondas de frecuencia $\nu = 10$ GHz?

**Problema 4:**
A partir de la expresión para el operador laplaciano en coordenadas esféricas, mostrar que las ondas esféricas están descriptas por funciones de la forma
$$\psi(r,t) = \frac{1}{r} f(r - vt).$$

**Problema 5:**
Cuándo dos ondas transversales, perpendiculares entre sí, dan una onda:

- linealmente polarizada;
- circularmente polarizada en sentido antihorario;
- circularmente polarizada en sentido horario;

- elpticamente polarizada en sentido antihorario?

**Problema 6:**
Escribir la expresión matemática de:
a) Una onda linealmente polarizada cuyo plano de polarización forma un ángulo de 30 con el eje x (se propaga según el eje z). b) Una onda que se propaga según el eje x, polarizada circularmente en sentido horario. c) Una onda elípticamente polarizada en sentido horario, que se propaga según el eje x, tal que el eje mayor, que es igual a dos veces el eje menor, está sobre el eje y.

**Problema 7:**
Los planos de polarización de dos ondas planas monocromáticas

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{10} \cos(wt - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_1), \qquad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{20} \cos(wt - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_2)$$

están inclinados uno respecto del otro un ángulo $\alpha = \pi/2$. Determinar la polarización de la onda resultante.

**Problema 8:**
Verificar que para una onda plana el flujo de energía por unidad de área y de tiempo es proporcional a la densidad de energía electromagnética y en el sistema gaussiano de unidades se puede escribir en la forma: $\mathbf{S} = cW\hat{\mathbf{n}}$, donde $W = (E^2 + B^2)/8\pi$.

**Problema 9:**
Considérese una onda electromagnética plana, linealmente polarizada (es decir, con los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en direcciones ortogonales fijas), viajando en la dirección $x$. Dada una frecuencia de 10 MHz y una amplitud $\mathbf{E}_0 = E_0\,\hat{\mathbf{y}}$,
a) Encontrar el período y la longitud de onda.
b) Escribir una expresión para los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$.
c) Encontrar el flujo de energía de la onda.

**Problema 10:**
Deducir la ley de reflexión a partir del *Principio de Fermat*, que establece que el tiempo de propagación entre dos puntos dados es un mínimo local.

**Problema 11:**
Mostrar analíticamente que un haz que entra a una lámina de caras paralelas (de índice de refracción $n$), emerge de la misma en dirección paralela a la original.

**Problema 12:**

Calcular el ángulo crítico más allá del cual hay reflexión total interna en una interfase aire-vidrio ($n = 1,5$).

**Problema 13:**
Comprobar que la condición para que se pueda despreciar el tiempo $\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{n}}/c$ en los potenciales retardados (lo cual permite llegar a las expresiones para la radiación dipolar de un sistema) puede escribirse

$$a \ll \lambda,$$

donde $a$ es el orden de las dimensiones del sistema y $\lambda$ es una longitud de onda característica de la radiación emitida.

**Problema 14:**
Comprobar que para un sistema aislado de partículas no relativistas con la misma relación carga/masa la radiación es nula.

**Problema 15:**
Determinar la intensidad de la radiación de una carga que se mueve siguiendo una trayectoria circular en un campo magnético uniforme y constante de magnitud $B$.

**Problema 16:**
Hallar la radiación total que se emite al chocar frontalmente dos partículas con cargas de igual signo. Ayuda: introducir la masa reducida $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ y el radio vector $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ para escribir el momento dipolar del sistema.

**Problema 17:**
Hallar la radiación total emitida cuando una carga pasa junto a otra con una velocidad $v$ suficientemente grande (si bien $v \ll c$) como para que se pueda considerar pequeña su desviación respecto del movimiento rectilíneo. Ayuda: introducir el parámetro de impacto $b$ para escribir $r(t)$ e introducir la expresión en una de las integrales del problema anterior.

**Problema 18:**
Considérese una antena lineal, extendida entre $z = d/2$ y $z = -d/2$, y alimentada en su centro de manera que la corriente a lo largo de la misma está dada por

$$I(z,t) = I_0 \left(1 - 2\frac{|z|}{d}\right) \cos(\omega t).$$

Encontrar la distribución angular de la potencia emitida, y la potencia total, suponiendo que $d \ll \lambda$, donde $\lambda$ es una longitud de onda característica de la radiación. Ayuda: usar la ecuación de continuidad $\nabla \cdot \mathbf{j} + \partial\rho/\partial t = 0$ para obtener el momento dipolar del sistema.