Nota sobre fuerzas de vínculo y ecuaciones de Lagrange

(Mecánica clásica, Solari, 2017)

Consideramos N cuerpos y sus $3N$ coordenadas artesianas, x_i, a cada coordenada le corresponde una masa m_i que es la masa del cuerpo a la que la coordenada refiere. Tenemos andemás M condiciones de vínculo en la forma

$$h_v(\{x_i\}, t) = a_v,\ v = 1 \ldots M$$

y podemos considerar $a_k = 0$ cuando se satisface la condición de vínculo. Los grados de libertad están representados por las coordenadas generalizadas

$$q_i,\ i = 1 \ldots 3N - M$$

si consideramos el conjunto formado por $\{q_i\} \cup \{a_v\}$reclamamos que sea localmente equivalente a las coordenadas carteasianas, es decir que exista la transformación

$$X_i(\{q\} \cup \{a\}, t) = x_i \tag{1}$$

A tiempo fijo, un desplazamiento de la condición inicial compatible con los vínculos está dado por

$$h_v(\{x_i + \delta_i\}, t) = a_v$$

y para desplazamientos infinitesimales es lo mismo que pedir

$$\sum_i \frac{\partial h_v}{\partial x_i}\delta_i = 0 = \sum_{ik} \frac{\partial h_v}{\partial x_i}\frac{\partial X_i}{\partial q_k}\delta q_k$$

Reconocemos entonces a

$$\left\{\frac{\partial h_v}{\partial x_i}\right\}$$

como las componentes del vector normal a la superficie determinada por la condición de vínculo k. Por el contrario, un desplazamiento que cambia el valor de a_v es

$$\delta a_v = \sum_i \frac{\partial h_v}{\partial x_i}\delta'_i$$

y tienen proyección no nula en la normal, puesto que la transformación 1 es invertible, tenemos

$$\begin{aligned} dX_i &= dx_i = \sum_k \frac{\partial X_i}{\partial q_k}dq_k + \sum_v \frac{\partial X_i}{\partial a_v}da_v + \frac{\partial X_i}{\partial t}dt \\ \delta X_i &= \sum_k \frac{\partial X_i}{\partial q_k}\delta q_k + \sum_v \frac{\partial X_i}{\partial a_v}\delta a_v \qquad (2) \end{aligned}$$

Podemos saber más sobre δa_k ya que

$$\delta a_v = \sum_{im}\left(\frac{\partial h_v}{\partial x_i}\frac{\partial X_i}{\partial a_m}\delta a_m\right) + \sum_{im}\left(\frac{\partial h_v}{\partial x_i}\frac{\partial X_i}{\partial q_m}\delta q_m\right)$$

La segunda suma es cero porque son todos los movimientos virtuales que no alteran los vínculos. La primera suma implica que

$$\sum_i \left(\frac{\partial h_v}{\partial x_i} \frac{\partial X_i}{\partial a_m} \right) = \delta_{vm} \tag{3}$$

donde δ_{km} es la delta de Kronecker.

Igual que como cuando comenzamos la derivación de las ecuaciones de Lagrange, escribimos

$$\sum_i \left(\frac{dp_i}{dt} - F_i - F_i' \right) \delta X_i = 0$$

Con F_i la fuerza expresada en términos de posición y coordenada que corresponde a la coordenada i y F_i' la contribución de los vínculos. Usando 2 llegamos rápidamente a:

$$\sum_{ik} \left(\frac{dp_i}{dt} - F_i \right) \frac{\partial X_i}{\partial q_k} \delta q_k + \sum_v \sum_i \left(\frac{dp_i}{dt} - F_i - F_i' \right) \frac{\partial X_i}{\partial a_v} \delta a_v = 0 \tag{4}$$

Pero todos los desplazamientos son independientes. Del primer grupo sabemos que obtenemos las ecuaciones de Lagrange, del segundo grupo obtenemos las fuerzas de vínculo.

Ecuaciones de Lagrange El punto de partida es entonces

$$\sum_i \left(\frac{dp_i}{dt} - F_i \right) \frac{\partial X_i}{\partial q_k} = 0$$

y debemos transformarlo reconociendo sus términos. El más sencillo es

$$-\sum_i F_i \frac{\partial X_i}{\partial q_k} = -\tilde{F}_k$$

la fuerza generalizada, que en caso de provenir F_i de un potencial, simplemente es:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\{q\}) &= V(\{X(q)\}) \\ \tilde{F}_k &= -\sum_i \frac{\partial V}{\partial X_i} \frac{\partial X_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial \tilde{V}}{\partial q_k} \end{aligned}$$

Es decir que se reescribe el potencial en termino de las coordenadas generalizadas y se deriva parcialmente respecto de ellas para obtener la fuerza generalizada.

El término cinético lleva más elaboración. Es necesario tener en cuenta que la transformación propuesta es geométrica. Por ejemplo, en un péndulo escribimos

$$(x, y) = L(\cos(\theta), \sin(\theta))$$

una transformación donde no interviene la velocidad. Si escribimos la velocidad en este ejemplo

$$(\dot{x}, \dot{y}) = L\dot{\theta}(-\sin(\theta), \cos(\theta))$$

que depende linealmente de la velocidad generalizada $\dot{\theta}$. En este caso podemos ver que

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial\theta} = \frac{\partial(\dot{x},\dot{y})}{\partial\dot{\theta}} = L(-\sin(\theta), \cos(\theta))$$

De la misma manera y de forma general

$$\dot{X}_i = \frac{dX_i}{dt} = \sum_k \frac{\partial X_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial X_i}{\partial t}$$

y

$$\frac{\partial X_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial \dot{q}_k} \tag{5}$$

La aceleración se escribe:

$$\ddot{X}_i = \frac{d^2 X_i}{dt^2} = \sum_{kl}\left(\frac{\partial^2 X_i}{\partial q_k \partial q_l}\dot{q}_k\dot{q}_l\right) + 2\sum_k \frac{\partial^2 X_i}{\partial t \partial q_k} + \sum_k \frac{\partial X_i}{\partial q_k}\ddot{q}_k + \frac{\partial^2 X_i}{\partial t^2}$$

dado que $\{q, \dot{q}, t\}$ son variables independientes. Otra expresión que precisamos es:

$$\frac{d}{dq_k}\left(\dot{X}_i\right) = \sum_l \frac{\partial^2 X_i}{\partial q_l \partial q_k}\dot{q}_l + \frac{\partial^2 X_i}{\partial t \partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial X_i}{\partial q_k}\right) \tag{6}$$

Es decir que la derivada temporal y parcial respecto a la coordenada generalizada se pueden intercambiar.

Ahora transformamos la cantidad

$$Esto = \sum_i \frac{dp_i}{dt}\frac{\partial X_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i p_i \frac{\partial X_i}{\partial q_k}\right) - \sum_i p_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial X_i}{\partial q_k}\right)$$

utilizando la expresión 5 y la expresión 6

$$Esto = \frac{d}{dt}\left(\sum_i p_i \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial \dot{q}_k}\right) - \sum_i p_i \left(\frac{\partial \dot{X}_i}{\partial q_k}\right)$$

Si formamos la expresión correspondiente a la energía cinética

$$\tilde{T} = \frac{1}{2}\sum_i m_i (\dot{X_i})^2 la$$

expresión anterior pasa a ser

$$Esto = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_k}\right)$$

Por lo tanto, considerando fuerzas que derivan de un potencial nos queda la ecuación

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_k}\right)-\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_k}\right)+\frac{\partial \tilde{V}}{\partial q_k}=0$$

y si formamos el lagrangiano

$$\mathcal{L}=\tilde{T}-\tilde{V}$$

llegamos a la expresión de las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}=0$$

Fuerzas de vínculos Volvemos a la ecuación 4 de la que obtenemos la parte de fuerza de los vínculos

$$\sum_i\left(\frac{dp_i}{dt}-F_i\right)\frac{\partial X_i}{\partial a_v}=\sum_i F_i'\frac{\partial X_i}{\partial a_v}=\sum_{im}\left(\lambda_m\frac{\partial h_m}{\partial x_i}\frac{\partial X_i}{\partial a_v}\right)=\lambda_v$$

dado que la fuerza de vínculo está dada en la dirección de la normal, $F_i'=\sum_v \lambda_v \frac{\partial h_v}{\partial x_i}$ y usando 3.

Pero si la fuerza $F_i=-\frac{\partial V}{\partial x_i}$ es decir que es conservativa y viene del gradiente de un potencial, V. Definimos

$$\tilde{V}(q,a)=V(\{X_i(q,a)\})$$

y tenemos

$$-\sum_i F_i\frac{\partial X_i}{\partial a_v}=\frac{\partial \tilde{V}}{\partial a_v}$$

Mientras que

$$\sum_i\frac{dp_i}{dt}\frac{\partial X_i}{\partial a_v}=\sum_i m_i\frac{dv_i}{dt}\frac{\partial X_i}{\partial a_v}$$

con

$$v_i=\sum_k\frac{\partial X_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial X_i}{\partial t}$$

Recordando que coordenadas y velocidades se pueden cambiar independientemente unas de otras, es decir que $\dot{q}_i$no debe ser considerado una función de las coordenadas

$$\frac{\partial v_i}{\partial a_m}=\sum_k\frac{\partial^2 X_i}{\partial q_k\partial a_m}\dot{q}_k+\frac{\partial^2 X_i}{\partial t\partial a_m}=\frac{d}{dt}\sum_k\frac{\partial X_i}{\partial a_m} \tag{7}$$

y reescribiendo como en Lagrange

$$\sum_i\frac{dp_i}{dt}\frac{\partial X_i}{\partial a_k}=\frac{d}{dt}\left(\sum_i p_i\frac{\partial X_i}{\partial a_k}\right)-\sum_i p_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial X_i}{\partial a_k}\right)$$

usando 7para obtener

$$\sum_i \frac{dp_i}{dt}\frac{\partial X_i}{\partial a_k} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i p_i \frac{\partial X_i}{\partial a_k}\right) - \sum_i p_i \frac{\partial v_i}{\partial a_k}$$

tenemos que esta última es

$$-\sum_i p_i \frac{\partial v_i}{\partial a_k} = -\frac{\partial T}{\partial a_k} \tag{8}$$

Tenemos todos los elementos ahora para evaluar

$$\sum_i \left(\frac{dp_i}{dt} - F_i\right)\frac{\partial X_i}{\partial a_v} = -\frac{\partial T}{\partial a_k} + \frac{d}{dt}\left(\sum_i p_i \frac{\partial X_i}{\partial a_k}\right) + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial a_v} = \lambda_v$$

Luego reconocemos que el lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\{q\}, \{\dot{q}\}, \{a\}, t)$$

y obtenemos λ como

$$\begin{aligned} \lambda_v &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_v} + \frac{d}{dt}\left(\sum_i p_i \frac{\partial X_i}{\partial a_k}\right) \\ F_i^v &= \lambda_v \left(\frac{\partial h_v}{\partial x_i}\right) \end{aligned}$$

Ecuación que todo ingeniero debe saber, pues da las demandas sobre los vínculos.

Es importante hacer notar que si en lugar de escribir

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, q, \dot{a}, t)$$

hubiéramos generado una energía cinética permitiendo el cambio de los vínculos en el tiempo, obteniendo

$$\tilde{v}_i = \sum_k \frac{\partial X_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \sum_v \frac{\partial X_i}{\partial a_v}\dot{a}_v + \frac{\partial X_i}{\partial t}$$

y

$$\tilde{T}(q, \dot{q}, a, \dot{a}, t) = \sum_i \frac{m_i}{2}\tilde{v}_i^2$$

podemos verificar una vez más que (usando la independencia de la velocidad respecto de la coordenada)

$$\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \dot{a}_v} = \frac{\partial X_i}{\partial a_v}$$

y por lo tanto la ecuación 8 se transforma en

$$\begin{aligned} \lambda_v &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_v} + \frac{d}{dt}\left(\left[\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{a}_v}\right]_{\{a_v = \dot{a}_v = 0\}}\right) \\ \tilde{\mathcal{L}} &= \tilde{T} - \tilde{V} \\ \mathcal{L} &= \tilde{\mathcal{L}}(q, \dot{q}, a, 0, t) \end{aligned}$$

Ejemplo Varilla que se mueve con velocidad angular w donde está insertada una masa, m, que puede deslizar sobre ella. Hacemos el movimiento perpendicular a la gravedad para facilitar las cosas.

$$
\begin{aligned}
(x, y) &= r(\cos(wt+a), \sin(wt+a)) \\
v &= rw(-\sin(wt+a), \cos(wt+a)) + \dot{r}(\cos(wt+a), \sin(wt+a)) \\
\frac{dv}{dt} &= (\ddot{r} - rw^2)(\cos(wt+a), \sin(wt+a)) + 2\dot{r}w(-\sin(wt+a), \cos(wt+a)) \\
\mathcal{L} &= ((wr)^2 + \dot{r}^2)\frac{m}{2}
\end{aligned}
$$

Ecuación de movimiento

$$\frac{d(m\dot{r})}{dt} = mw^2 r$$

Para el futuro, constante de movimiento $H = \frac{m}{2}(-(wr)^2 + \dot{r}^2)$. Condición de vínculo

$$\arctan(\frac{y}{x}) - wt = a$$

dirección de la fuerza de vínculo (mejor dicho, el vector gradiente del vínculo)

$$(y, -x)/r^2 = (-\sin(wt+a), \cos(wt+a))/r$$

y también

$$p \cdot \frac{\partial}{\partial a} r(\cos(wt+a), \sin(wt+a)) = mr^2 w$$

$$2m\dot{r}w(-\sin(wt+a), \cos(wt+a)) = F$$

que podemos verificar es la proyección de la masa por la aceleración tangencial.