

MATEMÁTICA ESPECIAL PARA LA FÍSICA

PRINCIPIOS VARIACIONALES

Claudio Simeone

Junio de 2003

Resumen

En estas notas se comienza introduciendo la noción de funcional y del principio de mínima acción a través de la obtención de leyes básicas de la mecánica clásica. Luego, en la segunda parte, se dan los elementos generales del cálculo variacional para sistemas con un número finito de grados de libertad. La tercera parte trata el tema específico de los sistemas con infinitos grados de libertad, y se dan allí algunos ejemplos mecánicos (la membrana y la cuerda), y un ejemplo de campo (ecuación de Klein–Gordon). Finalmente, en la cuarta parte se aplican los resultados de la tercera al campo electromagnético, y se obtienen las ecuaciones de Maxwell.

Contenidos

1. Introducción

- 1.1. La ley de inercia
- 1.2. La ley de caída de los cuerpos

2. Elementos del cálculo variacional

- 2.1. Funcionales
- 2.2. Espacios de funciones
- 2.3. Variación de una funcional
- 2.4. Extremo de una funcional
- 2.5. Ecuación de Euler
- 2.6. Varias variables
- 2.7. Problemas variacionales en forma paramétrica
- 2.8. El principio de mínima acción

3. Principios variacionales para sistemas con infinitos grados de libertad

- 3.1. Variación de una funcional y ecuación de Euler
- 3.2. Ejemplo: la membrana vibrante
- 3.3. Acción mínima y acción estacionaria
- 3.4. Sistemas disipativos. Difusión
- 3.5. El principio de la acción estacionaria para campos
- 3.6. Ecuación de Klein–Gordon

4. Ecuaciones del campo electromagnético

- 4.1. Acción de una carga en un campo electromagnético
- 4.2. Ecuaciones de movimiento de una carga

- 4.3. El primer par de ecuaciones de Maxwell
- 4.4. El tensor campo electromagnético
- 4.5. El segundo par de ecuaciones de Maxwell
- 4.6. Tensor energía impulso y leyes de conservación.

Apéndice A

Apéndice B

Apéndice C

1. Introducción. De Galileo al principio de mínima acción

Comenzaremos por introducir los conceptos básicos del cálculo variacional sin insistir demasiado en el rigor matemático, sino más bien en la claridad de exposición de las ideas fundamentales. Para esto mostraremos que la noción de funcional y la idea de minimizarla para obtener las ecuaciones de movimiento de un sistema surgen de manera bastante natural y sencilla cuando se busca algún principio matemático del cual se puedan deducir las leyes más básicas de la mecánica.

1.1. La ley de inercia

Consideremos el movimiento de un cuerpo puntual libre de fuerzas que en el instante t_1 se encuentra en la posición x_1 y en el instante t_2 se encuentra en la posición x_2 . Su velocidad media en el intervalo $t_2 - t_1$ es

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \quad (1)$$

Esto no nos dice nada, por cierto, acerca del comportamiento del cuerpo entre los instantes t_1 y t_2 : en principio, cualquier curva $v(t)$ tal que el área bajo $v(t)$ entre t_1 y t_2 sea igual al desplazamiento $x_2 - x_1$ sería admisible.

Sin embargo, desde Galileo sabemos que para un cuerpo libre de fuerzas la naturaleza elige siempre la curva

$$V(t) = \bar{v} = \text{constante}. \quad (2)$$

La curva correspondiente a la posición en función del tiempo es, claro está, una recta de pendiente igual a \bar{v} . Supongamos que se quiere encontrar algún principio del cual se deduzca que, entre todas las curvas $v(t)$ tales que el área entre t_1 y t_2 es igual al

desplazamiento $x_2 - x_1$, la curva que representa el movimiento real del cuerpo libre es $V(t) = \bar{v} = \text{constante}$. Para esto necesitamos hallar un criterio para diferenciar entre todas estas curvas, y la clave nos la da el hecho de que funciones que no difieren en sus valores medios sí difieren en los valores medios de sus cuadrados.

Consideremos una curva $v(t)$ cualquiera tal que el área entre t_1 y t_2 sea igual a $x_2 - x_1$, es decir,

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (3)$$

Toda función $v(t)$ que verifique esta igualdad puede escribirse como

$$v(t) = \bar{v} + \delta v(t), \quad (4)$$

donde la variación $\delta v(t)$ es tal que

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \delta v(t) dt. \quad (5)$$

Calculemos el valor medio del cuadrado de la velocidad:

$$\overline{v^2} = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} v^2 dt = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \left[\int_{t_1}^{t_2} \bar{v}^2 dt + 2 \int_{t_1}^{t_2} \bar{v} \delta v dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta v^2 dt \right]. \quad (6)$$

Como \bar{v} es una constante y δv verifica la (2.4), esta expresión se reduce a

$$\overline{v^2} = \bar{v}^2 + \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} \delta v^2 dt. \quad (7)$$

Dado que δv^2 es mayor o igual que cero, su integral entre t_1 y t_2 es positiva salvo cuando $\delta v = 0$; en este caso particular la integral se anula y en la expresión anterior sólo subsiste el primer término de la suma. La curva de Galileo $V(t) = \bar{v}$, para la cual es $\delta v = 0$, tiene entonces una propiedad notable: el valor medio del cuadrado de la velocidad toma *el menor valor posible* compatible con que el cuerpo se encuentre en x_1 en el instante t_1 y en x_2 en el instante t_2 .

Observemos que como $t_2 - t_1$ es un intervalo dado, al movimiento real –uniforme– del cuerpo libre corresponde el valor mínimo de la integral

$$\int_{t_1}^{t_2} v^2 dt. \quad (8)$$

Hemos obtenido así el principio que buscábamos: el movimiento del cuerpo libre es tal que la integral (8) toma el mínimo valor posible compatible con las condiciones $x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$. Notemos que la integral (8) no asigna números a diferentes valores de cierta variable, sino que asigna números a diferentes *funciones*; esto resulta evidente si se piensa que, en particular, el valor mínimo de la integral (8) corresponde, no a determinado valor de una variable, sino a *cierta curva*. Se dice que la (8) es una *funcional*.

Verifiquemos que, efectivamente, el principio encontrado conduce a la ley de inercia de Galileo. Si la integral (8) alcanza un mínimo, su variación a primer orden debe anularse:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} v^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial v^2}{\partial v} \delta v dt = 0. \quad (9)$$

Como las curvas $v(t)$ admisibles son las compatibles con las condiciones $x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$, expresaremos la variación δv en términos de la variación δx , que mide cuánto difiere una curva $x(t)$ de la curva real asociada con el movimiento uniforme; escribiendo $\delta v = \frac{d}{dt}(\delta x)$ obtenemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial v^2}{\partial v} \frac{d}{dt}(\delta x) dt = 0. \quad (10)$$

Integrando por partes se tiene

$$0 = \left[\frac{\partial v^2}{\partial v} \delta x \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v^2}{\partial v} \right) \delta x dt, \quad (11)$$

y como los valores de x en los extremos están fijos, es $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$, de donde

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v^2}{\partial v} \right) \delta x dt. \quad (12)$$

Como $\delta x(t)$ puede ser *cualquier* función que se anule en los extremos, para que se verifique la ecuación (12) debe ser

$$\frac{d}{dt}(2v) = 0, \quad (13)$$

es decir,

$$v = \text{constante}, \quad (14)$$

de acuerdo con la ley de inercia.

1.2. La ley de caída de los cuerpos

Pasemos ahora al caso de un cuerpo en interacción con otros. Para esto, comencemos por el *principio de relatividad de Galileo*: en todos los sistemas de referencia inerciales las leyes del movimiento de los cuerpos son las mismas. Como en la mecánica clásica el tiempo tiene un carácter absoluto, del principio de relatividad se desprende que si un cuerpo B ejerce una fuerza sobre un cuerpo A , un cambio en la posición de B debe modificar de manera *instantánea* dicha fuerza: de no ser así, si se hiciera interactuar a los cuerpos A y B en un sistema inercial y luego se repitiera el experimento en otro sistema que se desplaza uniformemente respecto del primero, se obtendrían resultados diferentes en cada sistema. El hecho de que un cambio en la posición de un cuerpo deba producir *instantáneamente* un cambio en la fuerza que ejerce sobre otro, esto es, que la fuerza en cierto instante depende de las posiciones en ese mismo instante, permite describir la interacción entre dos cuerpos mediante una función que depende solamente de sus coordenadas.

Para un cuerpo en interacción con otros que realizan un movimiento dado, cabe entonces buscar la funcional cuyo valor mínimo corresponde a su ley de movimiento en la forma de una integral que contenga, además del cuadrado de la velocidad, alguna

función de su posición y del tiempo.

Consideremos el ejemplo sencillo de un cuerpo que cae hacia la Tierra desde una altura pequeña comparada con el radio terrestre. La ley de movimiento del cuerpo está dada, como sabemos desde los *Diálogos* de Galileo, por una proporcionalidad directa de la velocidad con el tiempo; si se elige el sentido positivo del eje x hacia arriba tenemos

$$v = -gt. \quad (15)$$

Durante la caída de un cuerpo de masa pequeña la Tierra permanece prácticamente en reposo. Para describir el movimiento del cuerpo en interacción con la Tierra propondremos entonces una funcional de la forma

$$\int_{t_1}^{t_2} (v^2 + f(x)) dt, \quad (16)$$

es decir, cuyo integrando contenga, además del cuadrado de la velocidad, una función sólo de la posición del cuerpo (las demás coordenadas y, z , son, evidentemente, irrelevantes), y encontraremos la forma de $f(x)$ pidiendo que la condición de mínimo de la funcional conduzca a la ley (15).

Efectuando la variación e igualándola a cero, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int_{t_1}^{t_2} (v^2 + f(x)) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial v^2}{\partial v} \delta v + \frac{\partial f}{\partial x} \delta x \right] dt \\ &= \left[\frac{\partial v^2}{\partial v} \delta x \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v^2}{\partial v} \right) - \frac{\partial f}{\partial x} \right] \delta x dt, \end{aligned}$$

y como el primer término se anula por ser $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$, de forma análoga a la de más arriba se tiene

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v^2}{\partial v} \right) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (17)$$

de donde

$$2\frac{dv}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (18)$$

Dado que buscamos la función $f(x)$ que, al ser introducida en la funcional, conduzca a $v = -gt$, reemplazamos v por $-gt$ en la ecuación (18) y luego de una integración elemental obtenemos

$$f(x) = -2gx \quad (19)$$

(a menos de una constante aditiva). Vemos así que la función que debemos introducir en el integrando es $-2gx$. La funcional tal que al igualar a cero su variación a primer orden conduce a la ley de caída de los cuerpos es entonces

$$\int_{t_1}^{t_2} (v^2 - 2gx) dt. \quad (20)$$

Si multiplicamos la funcional por una constante definida positiva el mínimo de la funcional no cambia, y las ecuaciones de movimiento resultantes son las mismas. Para obtener en el integrando cantidades conocidas, multiplicamos entonces por $m/2$ donde m es la masa de la partícula. Obtenemos así la funcional *acción*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt, \quad (21)$$

donde $T = \frac{1}{2}mv^2$ es la energía cinética, y $U = mgx$ es la energía potencial asociada a la interacción gravitatoria entre el cuerpo y la Tierra.

Para cualquier interacción a la que se asocie una energía potencial U las leyes del movimiento de un cuerpo pueden obtenerse de la condición de mínimo de una integral de la forma (21). En forma general, la acción S puede definirse para un número cualquiera de grados de libertad, incluso infinitos. En estas notas mostraremos cómo se obtiene la dinámica de un sistema con infinitos grados de libertad, tanto en el caso de sistemas mecánicos (estudiaremos la membrana vibrante y la cuerda) como en el caso de campos. Como primer ejemplo de campo nos ocuparemos del campo escalar

real, para el cual obtendremos la ecuación de movimiento conocida como *ecuación de Klein–Gordon*. Luego nos ocuparemos del campo electromagnético y obtendremos las ecuaciones de Maxwell a partir del principio variacional $\delta S = 0$.

2. Elementos del cálculo variacional

2.1. Funcionales

Se entiende por *funcional* una correspondencia que asigna un número real a cada curva o función perteneciente a cierta clase. En cierto sentido, entonces, podríamos decir que una funcional es un tipo especial de función en la cual la variable independiente es ella misma un función.

- *Ejemplo:* Sea $F(x, y, z)$ una función continua. Entonces la expresión

$$J[y] = \int_a^b F[x, y(x), y'(x)] dx \quad (22)$$

donde $y(x)$ es cualquier función continua y diferenciable en el intervalo $[a, b]$, define una funcional. Diferentes funciones F dan como resultado diferentes funcionales. Por ejemplo, si $F(x, y, z) = \sqrt{1 + z^2}$, $J[y]$ es la longitud de la curva $y = y(x)$.

En general, en los problemas del cálculo variacional es usual encontrar funcionales definidas en la forma

$$J[y] = \int_a^b F[x, y(x), y'(x)] dx, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B. \quad (23)$$

Para análisis posteriores puede ser conveniente relacionar tales expresiones con las que son usuales en el cálculo diferencial clásico. Dividamos el intervalo $[a, b]$ en $n + 1$ partes iguales definiendo

$$x_0 = a, x_1, \dots, x_n, x_{n+1} = b. \quad (24)$$

Ahora reemplazamos la curva $y = y(x)$ por una poligonal cuyos vértices son

$$(x_0, A), (x_1, y(x_1)), \dots, (x_n, y(x_n)), (x_{n+1}, B), \quad (25)$$

y aproximamos la funcional $J[y]$ por la suma

$$J(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^{n+1} F\left(x_i, y_i, \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right) h, \quad y_i = y(x_i), \quad h = x_i - x_{i-1}. \quad (26)$$

Cada poligonal queda determinada por las ordenadas y_i de sus vértices, y la suma es entonces una función de las n variables y_1, \dots, y_n . El problema de encontrar los extremos de la funcional $J[y]$ puede entonces resolverse de manera aproximada encontrando los extremos de la función de n variables $J(y_1, \dots, y_n)$. Este método de diferencias finitas fue ampliamente utilizado por Euler. El resultado es exacto si se toma el límite $n \rightarrow \infty$.

2.2. Espacios de funciones

Un concepto muy importante en el contexto de las funcionales es el de *continuidad*. Su formulación requiere de la introducción de la idea de *norma* de una función, análoga a la de distancia entre un punto y el origen en el cálculo ordinario. Comenzaremos por definir entonces la noción de *espacio lineal normado*.

Por *espacio lineal* se entiende un conjunto \mathcal{R} de elementos x, y, z, \dots para los cuales la suma y la multiplicación por números reales cumple:

1. $x + y = y + x$;
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3. Existe el elemento 0 tal que $x + 0 = x$ para cualquier x en \mathcal{R} ;
4. Para cada x en \mathcal{R} existe un elemento $-x$ tal que $x + (-x) = 0$;
5. $1 \cdot x = x$;
6. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

$$7. (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x;$$

$$8. \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

Un espacio lineal \mathcal{R} se dice *normado* si a cada elemento x en \mathcal{R} se asocia un número no negativo $\|x\|$ llamado la *norma* de x tal que

$$1. \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$2. \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|;$$

$$3. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

En un espacio lineal normado se define la norma entre x y y como $\|x - y\|$. Los elementos de un espacio pueden ser de distintas clases. En particular, nos interesan los siguientes:

1. El espacio $\mathcal{C}(a, b)$ de todas las funciones continuas $y(x)$ definidas en el intervalo $[a, b]$. La norma se define como el máximo de su valor absoluto:

$$\|y\|_0 = \max_{a \leq x \leq b} |y(x)|. \quad (27)$$

2. El espacio de $\mathcal{D}_1(a, b)$ de las funciones $y(x)$ definidas en $[a, b]$ que son continuas y tienen primera derivada continua. La norma se define como

$$\|y\|_1 = \max_{a \leq x \leq b} |y(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |y'(x)|. \quad (28)$$

Dos funciones en \mathcal{D}_1 se consideran cercanas si

$$|y(x) - z(x)| < \varepsilon, \quad |y'(x) - z'(x)| < \varepsilon \quad (29)$$

para todo $a \leq x \leq b$.

3. El espacio $\mathcal{D}_n(a, b)$ de todas las funciones $y(x)$ definidas en $[a, b]$ que son continuas y tienen derivada continua hasta el orden n inclusive. La norma se define como

$$\|y\|_n = \sum_{i=0}^n \max_{a \leq x \leq b} |y^{(i)}(x)|. \quad (30)$$

Dos funciones en \mathcal{D}_n se consideran próximas si sus valores y los de todas sus derivadas son próximos.

Todas estas nociones se extienden en forma sencilla a funciones de varias variables. Una vez introducida la norma en un espacio lineal \mathcal{R} se define en forma natural la *continuidad* para funcionales definidas en \mathcal{R} : Se dice que la funcional $J[y]$ es continua en $\hat{y} \in \mathcal{R}$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|J[y] - J[\hat{y}]| < \varepsilon \quad (31)$$

si $\|y - \hat{y}\| < \delta$.

2.3. Variación de una funcional

Para introducir la noción de *variación* de una funcional comenzaremos por precisar la definición de *funcional lineal continua*. Dado un espacio lineal normado \mathcal{R} , a cada elemento h en \mathcal{R} se asigna un número $\phi[h]$, esto es, ϕ es una funcional en \mathcal{R} . Entonces $\phi[h]$ es una funcional lineal continua si

1. $\phi[\alpha h] = \alpha \phi[h]$ para cualquier $h \in \mathcal{R}$ y cualquier número real α ;
2. $\phi[h_1 + h_2] = \phi[h_1] + \phi[h_2]$ para h_1, h_2 cualesquiera en \mathcal{R} ;
3. $\phi[h]$ es continua para todo $h \in \mathcal{R}$.

Ahora pasemos a la variación de una funcional. Sea $J[y]$ una funcional definida sobre un espacio lineal normado, y sea

$$\Delta J[h] = J[y + h] - J[y] \quad (32)$$

su *incremento* correspondiente al incremento $h(x)$ de la función (“variable independiente”) $y(x)$. Si y está fijo, $\Delta J[h]$ es una funcional de h . Supongamos que

$$\Delta J[h] = \phi[h] + \varepsilon \|h\|, \quad (33)$$

donde $\phi[h]$ es una funcional lineal y $\varepsilon \rightarrow 0$ cuando $\|h\| \rightarrow 0$. Entonces la funcional $J[y]$ se denomina *diferenciable*, y la parte principal lineal del incremento $\Delta J[h]$, esto es, la funcional lineal $\phi[h]$ que difiere de $\Delta J[h]$ en un infinitésimo de orden superior a 1 respecto de h , se denomina la *variación* de $J[h]$ y se escribe $\delta J[h]$. Puede probarse que la variación de una funcional es única.

2.4. Extremo de una funcional

En forma análoga a la del análisis de funciones, se dice que una funcional $J[y]$ tiene un *extremo* (relativo) para $y = \hat{y}$ si en alguna vecindad de la curva $y = \hat{y}(x)$ la variación $J[y] - J[\hat{y}]$ no cambia de signo. Pueden definirse dos tipos de extremo: se dice que \hat{y} es un extremo *débil* si para $y = \hat{y}$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que $J[y] - J[\hat{y}]$ tiene el mismo signo para todos los y del dominio que verifican $\|y - \hat{y}\|_1 < \varepsilon$, donde $\| \cdot \|_1$ designa la norma en el espacio \mathcal{D}_1 . Se dice, en cambio, que $y = \hat{y}$ es un extremo *fuerte* si existe un $\varepsilon > 0$ tal que $J[y] - J[\hat{y}]$ tiene el mismo signo para todos los y del dominio que verifican $\|y - \hat{y}\|_0 < \varepsilon$, donde $\| \cdot \|_0$ designa la norma en el espacio \mathcal{C} . Un extremo fuerte es al mismo tiempo un extremo débil (pero no necesariamente es cierto lo recíproco).

Una condición necesaria para que la funcional diferenciable $J[y]$ tenga un extremo para $y = \hat{y}$ es que su variación se anule para $y = \hat{y}$, esto es,

$$\delta J[y] = 0 \tag{34}$$

para $y = \hat{y}$ y todo h admisible.

- *Demostración:* Supongamos que $J[y]$ tiene un mínimo para $y = \hat{y}$. De acuerdo con la definición de la variación $\delta J[h]$ tenemos

$$\Delta J[h] = \delta J[h] + \varepsilon \|h\|, \tag{35}$$

donde $\varepsilon \rightarrow 0$ cuando $\|h\| \rightarrow 0$. Entonces, para $\|h\|$ suficientemente pequeño, el signo de $\Delta J[h]$ es el mismo que el de $\delta J[h]$. Ahora supongamos que fuera posible $\delta J[h_0] \neq 0$ para algún h_0 admisible. Entonces para cualquier $\alpha > 0$ tenemos

$$\delta J[-\alpha h_0] = -\delta J[\alpha h_0]. \tag{36}$$

Así, $\Delta J[h]$ podría tener cualquier signo para un $\|h\|$ arbitrario. Pero esto contradice la hipótesis según la cual $J[y]$ tiene un mínimo para $y = \hat{y}$, esto es, $\Delta J[h] \geq 0$.

2.5. Ecuación de Euler

Consideremos el siguiente *problema variacional*: Sea $F(x, y, z)$ una función con derivadas primeras y segundas continuas para cualquiera de sus argumentos. Entonces, entre todas las funciones $y(x)$ continuamente diferenciables para $a \leq x \leq b$ que satisfacen las condiciones de contorno

$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \tag{37}$$

se quiere hallar la función F tal que la funcional

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (38)$$

tiene un extremo débil.

Como hemos visto que $J[y]$ tiene un extremo si $\delta J[y] = 0$, obtengamos la forma de la variación de la funcional. Supongamos que incrementamos y en una función h , de manera tal que $y(x) + h(x)$ verifica las condiciones de contorno. Entonces debe cumplirse que

$$h(a) = h(b) = 0. \quad (39)$$

Entonces, a partir de que

$$\begin{aligned} \Delta J[y] = J[y + h] - J[y] &= \int_a^b F(x, y + h, y' + h') dx - \int_a^b F(x, y, y') dx \\ &= \int_a^b [F(x, y + h, y' + h') - F(x, y, y')] dx, \end{aligned} \quad (40)$$

usando el desarrollo de Taylor para F tenemos que

$$\Delta J = \int_a^b [F_y(x, y, y')h + F_{y'}(x, y, y')h'] dx + \dots, \quad (41)$$

donde los subíndices indican derivadas parciales y los puntos términos de órdenes superiores en h y h' . La integral que aparece como primer término del desarrollo es la parte principal lineal del incremento ΔJ , esto es, es la variación δJ . De acuerdo con lo establecido en la sección anterior entonces la condición para que J tenga un extremo es que para todo h admisible sea

$$0 = \delta J = \int_a^b [F_y(x, y, y')h + F_{y'}(x, y, y')h'] dx \quad (42)$$

Si escribimos $F_{y'}h' = (F_{y'}h)' - (F_{y'})'h$ obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b [F_y h + (F_{y'} h)' - (F_{y'})' h] dx \\ &= [F_{y'} h]_a^b + \int_a^b [F_y - (F_{y'})' h] dx, \end{aligned} \quad (43)$$

y como $h(a) = h(b) = 0$ y h es arbitrario (véase el Apéndice A), entonces debe cumplirse que

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0. \quad (44)$$

Hemos obtenido así la que se conoce como *ecuación de Euler*. Las curvas integrales de esta ecuación son llamadas *extremales*. Como la ecuación es de segundo orden, su solución depende de dos constantes que se obtienen de las condiciones de contorno $y(a) = A$, $y(b) = B$. Es claro que la ecuación de Euler sólo es una condición necesaria para la existencia de un extremo, y no asegura que tal extremo realmente exista. En las aplicaciones del cálculo variacional, sin embargo, usualmente la existencia de un extremo es evidente a partir de consideraciones físicas, y por lo tanto dicha ecuación es suficiente para obtener la solución de un problema.

Las ecuaciones de Euler pueden darse en una forma ligeramente diferente a la deducida más arriba, la *forma canónica*, muy utilizada en la física. Para eso se definen las cantidades

$$p_i = F_{y'_i} \quad (45)$$

de manera que

$$H = -F + \sum_{i=1}^n y'_i p_i \quad (46)$$

donde las derivadas y'_i se tratan como funciones de $x, y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n$. Entonces al reemplazar en la integral funcional se tiene

$$J[y_i, p_i] = \int \left(\sum_{i=1}^n y'_i p_i - H \right) dx. \quad (47)$$

La condición de extremo $\delta S = 0$ conduce entonces, variando independiente las variables $x, y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n$, a las ecuaciones

$$\frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i} \quad (48)$$

que son las ecuaciones de Euler en forma canónica. En el contexto de la física las cantidades p_i se denominan los *momentos* del sistema, y la función H se denomina función de Hamilton o *hamiltoniana*.

2.6. Varias variables

Por simplicidad, nos limitaremos al caso de dos variables independientes. Sea entonces $F(x, y, z, p, q)$ una función con derivadas parciales primeras y segundas continuas, y consideremos una funcional de la forma

$$J[z] = \int \int_R F(x, y, z, z_x, z_y) dx dy, \quad (49)$$

donde R es alguna región cerrada y los subíndices designan derivadas parciales. Buscamos una función $z(x, y)$ tal que

1. $z(x, y)$ y sus derivadas primeras y segundas sean continuas en R ;
2. $z(x, y)$ tome valores dados sobre el borde Γ de R ;
3. La funcional $J[z]$ tenga un extremo para $z = z(x, y)$.

Calculemos la variación δJ debida a un incremento arbitrario $h(x, y)$ cuyas derivadas primeras y segundas son continuas en R y se anulan en la frontera Γ : procediendo en forma análoga a la de la sección anterior, obtenemos

$$\delta J = \int \int_R (F_z h + F_{z_x} h_x + F_{z_y} h_y) dx dy. \quad (50)$$

Ahora usemos la regla de derivación de un producto y el teorema de Green para escribir

$$\int \int_R (F_{z_x} h_x + F_{z_y} h_y) dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int \int_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(F_{z_x} h) + \frac{\partial}{\partial y}(F_{z_y} h) \right] dx dy - \int \int_R \left[\frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} \right] h dx dy \\
&= \int_{\Gamma} (F_{z_x} h dy - F_{z_y} h dx) - \int \int_R \left[\frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} \right] h dx dy.
\end{aligned}$$

Como h se anula sobre el borde Γ , entonces

$$\delta J = \int \int_R \left[F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} \right] h dx dy \quad (51)$$

y como la función $h(x, y)$ es arbitraria, entonces de la condición $\delta J = 0$ obtenemos la nueva ecuación de Euler

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} = 0 \quad (52)$$

que es una ecuación diferencial de segundo orden en derivadas parciales.

2.7. Problemas variacionales en forma paramétrica

En muchas aplicaciones físicas del cálculo variacional nos encontramos con curvas dadas en forma paramétrica, de manera que extenderemos los resultados previos para poder tratar problemas de esa clase. Supongamos que en la funcional

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \quad (53)$$

consideramos al argumento y como una curva dada en forma paramétrica. Podemos entonces escribir

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F \left[x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \right] \dot{x}(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt \quad (54)$$

donde el punto corresponde a una derivada respecto del parámetro t . La funcional depende así de dos funciones $x(t)$ e $y(t)$. La función Φ no depende explícitamente de t y es homogénea positiva de grado 1 en $\dot{x}(t)$ y $\dot{y}(t)$, es decir,

$$\Phi(x, y, \lambda \dot{x}, \lambda \dot{y}) = \lambda \Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \quad (55)$$

para todo $\lambda > 0$. Puede probarse entonces que el valor de la funcional no depende de la elección del parámetro en términos del cual se da la curva, de manera que es invariante ante una reparametrización $t = t(\tau)$. Supongamos entonces que alguna parametrización lleva la funcional J a la forma

$$\int_{t_0}^{t_1} F \left[x, y, \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right] \dot{x} dt = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt. \quad (56)$$

La condición $\delta J = 0$ conduce de esta manera al par de ecuaciones de Euler

$$\Phi_x - \frac{d}{dt} \Phi_{\dot{x}} = 0, \quad \Phi_y - \frac{d}{dt} \Phi_{\dot{y}} = 0 \quad (57)$$

que son equivalentes a la ecuación de Euler original en términos de F .

2.8. El principio de mínima acción

Consideremos un sistema de n partículas de masas m_i . La energía cinética T del sistema es la suma

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \quad (58)$$

y supongamos que las fuerzas actuantes sobre las partículas pueden obtenerse derivando una función $U(t, x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$ que llamamos energía potencial:

$$\mathbf{F}_i = - \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}, \frac{\partial U}{\partial y_i}, \frac{\partial U}{\partial z_i} \right). \quad (59)$$

En el instante t_0 el sistema se encuentra en alguna posición dada. Entonces la evolución del sistema para $t \geq 0$ estará dada por una curva

$$x_i = x_i(t), \quad y_i = y_i(t), \quad z_i = z_i(t), \quad (i = 1, \dots, n) \quad (60)$$

en un espacio de $3n$ dimensiones. El principio de mínima acción establece que la curva que describe el movimiento real del sistema minimiza la funcional *acción* S definida como la integral de la *lagrangiana* $L = T - U$:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt. \quad (61)$$

- *Demostración:* Si la acción tiene un mínimo, su variación debe anularse, y esto conduce a las ecuaciones de Euler (en este contexto se las suele denominar ecuaciones de Lagrange)

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} \right) = 0. \quad (62)$$

Como T no depende de las coordenadas y U no depende de las velocidades, entonces estas ecuaciones equivalen a

$$-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} \right) = 0, \quad (63)$$

que como $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2$ y $\mathbf{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i}$ conducen a

$$\mathbf{F}_i = m_i \ddot{\mathbf{x}}_i, \quad (64)$$

que son las ecuaciones de Newton para un sistema de n partículas, y cuya solución sabemos que corresponde al movimiento real del sistema.

En su forma canónica, esto es, en términos de la función hamiltoniana definida más arriba, las ecuaciones de movimiento tienen la forma

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i}, \quad \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_i}, \quad (65)$$

y reciben el nombre de ecuaciones de Hamilton. Es sencillo mostrar que el significado físico de la hamiltoniana es el de la energía mecánica $T + U$. Escribamos p_a, \dot{x}_a con a un índice que enumera las tres coordenadas espaciales de todas las partículas ($a = 1 \dots 3n$). Entonces, dado que $p_a = L_{\dot{x}_a} = m\dot{x}_a$, la suma $\sum \dot{x}_a p_a$ es igual a dos veces la energía cinética, de manera que

$$H = -L + \sum \dot{x}_a p_a = -T + U + 2T = T + U. \quad (66)$$

Salvo en el caso de que existieran vínculos dependientes del tiempo (ver más adelante), la única dependencia temporal explícita de la hamiltoniana con el tiempo puede estar en la energía potencial U . Entonces

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial t} + \sum \frac{\partial H}{\partial x_a} \dot{x}_a + \sum \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_a} \ddot{x}_a \\ &= \frac{\partial U}{\partial t} + \sum \frac{\partial U}{\partial x_a} \dot{x}_a + \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_a} \ddot{x}_a\end{aligned}\quad (67)$$

y las dos últimas sumas se cancelan término a término en virtud de las ecuaciones de Newton, de manera que

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t}.\quad (68)$$

Así, la energía se conserva si la energía potencial no depende explícitamente del tiempo (por cierto, no estamos considerando la posible existencia de fenómenos disipativos, que en principio no pueden describirse con un potencial).

Observación 1. El principio de mínima acción sigue valiendo si los cuerpos del sistema están sujetos a vínculos. Las ecuaciones diferenciales que resultan incluyen entonces multiplicadores de Lagrange. En efecto, consideremos por ejemplo un cuerpo que se mueve en el plano x, y sujeto a un vínculo

$$g(x, y, t) = 0\quad (69)$$

y tal que su trayectoria satisface las condiciones

$$\begin{aligned}x(t_a) &= A_1, & x(t_b) &= B_1, \\ y(t_a) &= A_2, & y(t_b) &= B_2.\end{aligned}\quad (70)$$

Supongamos que la acción tiene un extremo para la curva

$$x = x(t), \quad y = y(t).\quad (71)$$

Entonces, si las derivadas primeras de la condición de vínculo no se anulan en ningún punto de la superficie definida por $g = 0$, existe un multiplicador $\lambda(t)$ tal que la curva que corresponde al movimiento real del cuerpo es una extremal de la funcional

$$\int_{t_a}^{t_b} [L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) + \lambda(t)g] dt,$$

de manera que las ecuaciones de movimiento resultantes son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) &= 0. \end{aligned} \tag{72}$$

Aquí hemos supuesto que el vínculo está dado en la forma que se llama *finita*. Otra forma posible es la del llamado *problema isoperimétrico*, en el cual alguna otra funcional debe tomar cierto valor (véase el Apéndice B).

Observación 2. Hablando estrictamente, el principio de mínima acción sólo es válido para intervalos temporales pequeños. En general, lo que sigue siendo válido para un intervalo cualquiera es que $\delta S = 0$, esto es, que la acción sea estacionaria para la curva correspondiente al movimiento real del sistema (ver más adelante).

3. Principios variacionales para sistemas con infinitos grados de libertad

3.1. Variación de una funcional y ecuación de Euler

Consideremos una funcional cuyo integrando F depende de n variables independientes x_1, \dots, x_n y además de una función u de estas variables y de sus derivadas u_{x_1}, \dots, u_{x_n} :

$$J[u] = \int \dots \int_R F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) dx_1 \dots dx_n. \quad (73)$$

Supondremos, como hicimos anteriormente, que el integrando tiene sus derivadas parciales primeras y segundas continuas respecto de todos sus argumentos. Calcularemos la variación de J para el caso en que la región R se mantiene fija y la función $u(x_1, \dots, x_n)$ se transforma en

$$u^*(x_1, \dots, x_n) = u(x_1, \dots, x_n) + \varepsilon \psi(x_1, \dots, x_n) + \dots, \quad (74)$$

donde ψ se anula en el borde de R , y los términos siguientes son de orden mayor que 1 en ε . La correspondiente variación de la funcional es la parte lineal principal de la diferencia

$$\Delta J = J[u^*] - J[u]. \quad (75)$$

Usando un desarrollo en serie de Taylor podemos escribir

$$\begin{aligned} \Delta J &= \int_R F[x, u(x) + \varepsilon \psi(x), u_{x_1}(x) + \varepsilon \psi_{x_1}(x), \dots, u_{x_n}(x) + \varepsilon \psi_{x_n}(x)] - \\ &\quad - \int_R F[x, u(x), u_{x_1}(x), \dots, u_{x_n}(x)] dx \\ &= \varepsilon \int_R \left(F_u + \sum_{i=1}^n F_{u_{x_i}} \psi_{x_i} \right) dx + \dots, \end{aligned} \quad (76)$$

donde hemos simplificado la notación escribiendo x para el conjunto de todas las x_i .

La variación δJ es entonces

$$\delta J = \varepsilon \int_R \left(F_u + \sum_{i=1}^n F_{u_{x_i}} \psi_{x_i} \right) dx. \quad (77)$$

Reemplacemos ahora

$$F_{u_{x_i}} \psi_{x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} [F_{u_{x_i}} \psi(x)] - \frac{\partial F_{u_{x_i}}}{\partial x_i} \psi(x)$$

de manera tal que

$$\delta J = \varepsilon \int_R \left(F_u - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [F_{u_{x_i}}] \right) \psi(x) dx + \varepsilon \int_R \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [F_{u_{x_i}} \psi(x)] dx. \quad (78)$$

Pero de acuerdo con el teorema de Green para n dimensiones tenemos que

$$\int_R \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [F_{u_{x_i}} \psi(x)] dx = \int_{\Gamma} \psi(x) \mathbf{G} \cdot d\sigma \quad (79)$$

donde \mathbf{G} es el vector de componentes $\{F_{u_{x_1}}, \dots, F_{u_{x_n}}\}$ y $d\sigma$ es el vector asociado a un diferencial de superficie sobre el borde Γ de la región R . Como estamos interesados en la variación de J ante cualquier $\psi(x)$ que se anule sobre Γ , entonces la integral de superficie es nula, y la variación se reduce a

$$\delta J = \varepsilon \int_R \left(F_u - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [F_{u_{x_i}}] \right) \psi(x) dx. \quad (80)$$

Dado que $\psi(x)$ es arbitraria, la condición para la existencia de un extremo $\delta J = 0$ implica que

$$F_u - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [F_{u_{x_i}}] = 0, \quad (81)$$

para todo x en la región R . Esta es la ecuación de Euler para una funcional cuyo integrando depende de las coordenadas x y de una función desconocida u y sus derivadas primeras.

3.2. Ejemplo: la membrana vibrante

Consideremos el movimiento transversal de una hoja flexible homogénea, cuyo borde permanece fijo. Sea ρ su densidad superficial de masa, R la región ocupada por la

membrana, y $u(x, y, t)$ el desplazamiento respecto de su posición de equilibrio del punto (x, y) de la membrana a un tiempo t ; está claro que el estado del sistema está dado por los infinitos valores de u , uno para cada punto (x, y) , y que por lo tanto el problema es el de la dinámica de un sistema con infinitos grados de libertad.

La energía cinética del sistema es

$$T = \frac{1}{2}\rho \int \int_R u_t^2(x, y, t) dx dy. \quad (82)$$

La energía potencial es igual al trabajo requerido para llevar a la membrana de la posición $u = 0$ a $u(x, y, t)$, esto es, para deformar a la membrana (recordemos que estamos suponiendo que su borde no se desplaza). Si la tensión sobre la membrana es τ y consideramos una región pequeña dada por $x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x$ y $y_0 \leq y \leq y_0 + \Delta y$, entonces el trabajo U para deformar esa región es igual al producto de la tensión por el incremento de área debido a la deformación:

$$\begin{aligned} \tau \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta u)^2} \sqrt{(\Delta y)^2 + (\Delta u)^2} - \tau \Delta x \Delta y &= \\ &= \frac{1}{2} \tau \left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{\Delta u}{\Delta y} \right)^2 \right] \Delta x \Delta y + \dots, \\ &= \frac{1}{2} \tau [u_x^2(x_0, y_0, t) + u_y^2(x_0, y_0, t)] \Delta x \Delta y + \dots, \end{aligned} \quad (83)$$

donde los puntos indican términos de orden superior. Integrando sobre la región R obtenemos

$$U = \frac{1}{2} \tau \int \int_R [u_x^2(x, y, t) + u_y^2(x, y, t)]. \quad (84)$$

De esta manera, la funcional acción para la membrana se escribe como

$$\begin{aligned} S[u] &= \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_R \left\{ \rho u_t^2(x, y, t) - \tau [u_x^2(x, y, t) + u_y^2(x, y, t)] \right\} dx dy dt. \end{aligned} \quad (85)$$

Observemos que la acción de este sistema puede pensarse como una integral en el espacio y el tiempo de una *densidad lagrangiana* que es la resta de las densidades de energía potencial y energía cinética. La variación de S es entonces

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_0}^{t_1} \int_R [-\rho u_{tt} + \tau(u_{xx} + u_{yy})] \delta u \, dx \, dy \, dt \\ &\quad - \tau \int_{t_0}^{t_1} \int_R \left[\frac{\partial}{\partial x} (u_x \delta u) + \frac{\partial}{\partial y} (u_y \delta u) \right] dx \, dy \, dt \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \int_R \frac{\partial}{\partial t} (u_t \delta u) dx \, dy \, dt,\end{aligned}\tag{86}$$

donde δu juega el papel de la cantidad $\varepsilon\psi$ de más arriba. El último término de esta expresión se anula si suponemos que $\delta u(t_0) = \delta u(t_1) = 0$ en todo punto de la membrana, y el término anterior puede escribirse, usando el teorema de Green, como una integral sobre el borde Γ de R :

$$\tau \int_{t_0}^{t_1} \int_R \left[\frac{\partial}{\partial x} (u_x \delta u) + \frac{\partial}{\partial y} (u_y \delta u) \right] dx \, dy \, dt = \tau \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \delta u \, ds,\tag{87}$$

donde n es el versor normal exterior a la curva Γ . Entonces, como supusimos que el borde está fijo, $\delta u = 0$ sobre Γ para todo tiempo, y este término también se cancela. De esta manera, la variación de la acción se reduce a

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \int_R [-\rho u_{tt} + \tau(u_{xx} + u_{yy})] \delta u \, dx \, dy \, dt\tag{88}$$

y la condición $\delta S = 0$ conduce, dado el carácter arbitrario de δu dentro de la región R , a la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$u_{tt}(x, y, t) = \frac{\tau}{\rho} [u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t)]\tag{89}$$

que es conocida como ecuación de la membrana vibrante. Puede pensarse como un conjunto de infinitas ecuaciones de Euler, una para cada punto (x, y) de la membrana (en el contexto de la mecánica se dice que son las ecuaciones de Lagrange). Más

adelante veremos que eliminando una dimensión espacial la ecuación de este problema se reduce a la correspondiente al problema de la cuerda vibrante con sus extremos fijos.

3.3. Acción mínima y acción estacionaria

Como ya mencionamos más arriba, la acción no necesariamente debe tener un mínimo sobre la trayectoria del sistema, sino que basta con que su variación a primer orden sea nula. Ilustraremos este punto con tres ejemplos, el primero un sistema simple con un único grado de libertad, el segundo con n grados de libertad, y el tercero con infinitos (la cuerda vibrante):

1. *El oscilador armónico.* La energía cinética y la energía potencial de un cuerpo puntual sujeto a una fuerza elástica dada por la ley de Hooke son

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \quad U = \frac{1}{2}kx^2, \quad (90)$$

donde k es la constante elástica. La funcional acción es entonces

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (m\dot{x}^2 - kx^2) dt, \quad (91)$$

y la condición $\delta S = 0$ conduce a la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (92)$$

cuya conocida solución es de la forma

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (93)$$

Consideremos una función de la forma

$$x = \frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega t \quad (94)$$

que pase por $x = 0$ cuando $t = 0$ y satisfaga la condición $\dot{x}(0) = 1$. El punto $(x = 0, t = \pi/\omega)$ se dice *conjugado* del $(0, 0)$ porque cualquier extremal que satisfaga $x(0) = 0$ interseca la función $x = \frac{1}{\omega} \text{sen} \omega t$ en $(0, \pi/\omega)$. Dado que la derivada segunda del integrando respecto de \dot{x} es igual a $m > 0$, entonces esta función verifica las condiciones suficientes para ser un mínimo (fuerte), en tanto se cumpla que

$$0 \leq t \leq t_0 < \frac{\pi}{\omega}. \quad (95)$$

Sin embargo, para intervalos mayores no se puede garantizar que esta función minimice la funcional acción.

2. *Sistema de n osciladores acoplados.* Las energías potencial y cinética de dicho sistema son

$$T = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k, \quad U = \sum_{i,k=1}^n b_{ik} x_i x_k. \quad (96)$$

Ambas expresiones pueden reducirse a sumas de cuadrados eligiendo las llamadas coordenadas normales Q_i , de manera que

$$T = \sum_{i,k=1}^n \dot{Q}_i^2, \quad U = \sum_{i,k=1}^n \lambda_i Q_i^2. \quad (97)$$

Las ecuaciones de movimiento se obtienen de las ecuaciones de Euler-Lagrange, y son

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{Q}_i} \right) + \frac{\partial U}{\partial Q_i} = 2\ddot{Q}_i + 2\lambda_i Q_i = 0. \quad (98)$$

Supongamos que todas las constantes λ_i son positivas, de manera que estamos considerando oscilaciones alrededor de posiciones de equilibrio estable. La solución es entonces

$$Q_i = A_i \text{sen}(\omega_i t + \varphi_i), \quad \omega_i = \sqrt{\lambda_i}, \quad (99)$$

donde las constantes se determinan a partir de las condiciones iniciales. En forma análoga a la del ejemplo anterior, puede mostrarse que una curva correspondiente al movimiento del sistema, cuya proyección sobre el eje temporal sea menor que π/ω con

$$\omega = \max_{1 \leq i \leq n} \omega_i,$$

no tiene puntos conjugados y satisface las condiciones suficientes para ser un mínimo de la funcional acción. Sin embargo, para tiempos mayores que π/ω no puede asegurarse que una curva tal minimice la acción.

3. *La cuerda vibrante.* Consideremos una cuerda de longitud natural l con sus extremos fijos. El problema es análogo al de la membrana, pero con una dimensión menos, de manera que la ecuación diferencial asociada es

$$u_{tt}(x, t) = \frac{\tau}{\rho} u_{xx}(x, t) \quad (100)$$

con las condiciones de contorno

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0. \quad (101)$$

Puede mostrarse que la solución es de la forma

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(x) \text{sen}(\omega_k t + \varphi_k), \quad \omega_k = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \frac{k\pi}{l}, \quad (102)$$

donde las constantes están determinadas por las condiciones iniciales. Observemos que la cuerda vibrante puede pensarse como un sistema de infinitos osciladores acoplados. Notemos que las frecuencias ω_k no están acotadas, y por lo tanto un razonamiento análogo al del ejemplo anterior nos lleva entonces a concluir que *no hay ningún intervalo suficientemente pequeño* que permita asegurar que la solución $u(x, t)$ verdaderamente minimiza la funcional acción.

Argumentos similares pueden darse para otros sistemas con infinitos grados de libertad. Por lo tanto, de ahora en adelante no hablaremos de minimizar la acción para encontrar las ecuaciones de movimiento, sino de buscar que sea estacionaria, es decir, que su variación a primer orden sea nula.

3.4. Sistemas disipativos. Difusión

Introduciremos un formalismo que permitirá tratar la difusión, que es un fenómeno disipativo (y por lo tanto, involucra interacciones que en principio no pueden derivarse de una energía potencial) como si se tratara de un fenómeno conservativo. La idea es considerar que, de alguna manera, con el sistema disipativo considerado coexiste un *sistema imagen* para el cual en lugar de disipación tenemos incremento de la energía. El “sistema” completo es entonces un sistema conservativo, y se puede por lo tanto definir para el mismo una lagrangiana.

Comencemos por el caso sencillo de un oscilador amortiguado, cuya ecuación de movimiento es

$$m\ddot{x} + R\dot{x} + kx = 0 \quad (103)$$

donde R es la constante que determina la intensidad de la fricción. Definamos ahora la lagrangiana para el sistema “completo”

$$L = m\dot{x}\dot{x}^* - \frac{1}{2}R(x^*\dot{x} - x\dot{x}^*) - kxx^* \quad (104)$$

donde la coordenada x^* es la de la partícula imagen con amortiguamiento negativo. Las ecuaciones de lagrange que se obtienen variando la acción

$$S = \int_a^b L(x, x^*, \dot{x}, \dot{x}^*) dt \quad (105)$$