Temas avanzados de termodinámica y física estadística – 1er. cuatrimestre de 2015

Guía 2: *Teoría de grandes desviaciones*

Dadas N variables aleatorias X_i, independientes e idénticamente distribuidas, se define el promedio

$$S_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i.$$

1. Calcular la probabilidad (en los casos discretos) o la densidad de probabilidad (en los casos continuos) para S_N en los siguientes casos:

   (a) Variable aleatoria binaria, con $X \in \{-1, 1\}$, $P(X = -1) = \alpha$ y $P(X = 1) = \beta$.

   (b) Variable con tres estados posibles, $X \in \{-1, 0, 1\}$, $P(X = -1) = P(X = 0) = P(X = 1)$.

   (c) Variable gaussiana, con densidad $p(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left[-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)\right]$.

   (d) Variable aleatoria con densidad exponencial, $p(x) = \alpha e^{-\alpha x}$.

2. Para las variables del problema anterior, **calculando explícitamente el límite** cuando $N \to \infty$, demostrar que S_N satisface un principio de grandes desviaciones, que se expresa como

$$-\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log P_N(s) = I(s),$$

   y dar $I(s)$. Aquí $P_N(s)$ es o bien la probabilidad o bien la densidad de probabilidad asociada a S_N, según sea el caso discreto o continuo. (*Sugerencia:* en los dos casos discretos, usar la aproximación de Stirling. En particular, en el caso (b), donde la probabilidad queda escrita como una suma, encontrar el término que domina la suma y quedarse sólo con ese término; graficar el término general de la suma para convencerse de que para $N \gg 1$ sólo ese término importa.)

3. Como verificación del teorema central del límite, en cada caso desarrollar $I(s)$ alrededor de su mínimo y obtener la gaussiana que aproxima la probabilidad para desviaciones *normales*, por contraste con *grandes*.

4. Para los casos anteriores, obtener $I(s)$ mediante la transformada de Legendre del funcional generador, a través de la relación

$$I(s) = \sup_{k\in\mathbf{R}} \{sk - W(k)\},$$

   válida siempre que $I(s)$ sea una función convexa. Aquí

$$W(k) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \left\langle e^{N S_N k} \right\rangle.$$

   Verificar que los resultados obtenidos mediante este método coinciden con los obtenidos antes mediante el cálculo directo del límite para $N \to \infty$.

5. Si la función $I(s)$ existe pero no es convexa, el método de la transformada de Legendre falla. Un ejemplo de esto es una variable S_N definida como el promedio de N variables gaussianas X_i, con media cero y $\sigma^2 = 1$, más una variable aleatoria discreta Y que puede tomar los valores ± 1 con igual probabilidad:

$$S_N = Y + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

   (a) Calcular $P_N(s)$ explícitamente. Verificar que es la suma de dos gaussianas centradas en ± 1.

   (b) Demostrar que S_N satisface un principio de grandes desviaciones, que se expresa como

$$- \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \log P_N(s) = I(s),$$

   donde $I(s)$ no es una función convexa. (En este punto hay que tener cuidado al tomar el límite de la suma de dos exponenciales.)

   (c) Calcular la transformada de Legendre

$$W^*(s) = \sup_{k \in \mathbf{R}} \{sk - W(k)\},$$

   y mostrar que coincide con $I(s)$ sólo en sus tramos convexos.

6. Calcular, únicamente con lápiz y papel, el valor aproximado de la siguiente integral

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \ (\cos x)^{349}.$$