Temas avanzados de termodinámica y física estadística – 1er. cuatrimestre de 2013

Guía 7: *Matriz densidad y entropía de von Neumann*

1. El estado de un sistema formado por un solo fotón se define del siguiente modo: con probabilidad $1/2$ el fotón es producido en el estado de polarización lineal según x, llamado $|X\rangle$, y con probabilidad $1/2$ en el estado con polarización lineal según y, llamado $|Y\rangle$. Los estados $|X\rangle$ y $|Y\rangle$ son ortogonales.

   (a) Usando los proyectores $|X\rangle\langle X|$ y $|Y\rangle\langle Y|$, escribir el operador matriz densidad $\boldsymbol{\rho}$ que corresponde al mecanismo de producción antes detallado.

   (b) Dar la representación matricial del operador $\boldsymbol{\rho}$ en la base ortonormal compuesta por los vectores $|X\rangle$ y $|Y\rangle$.

   (c) Calcular la entropía de von Neumann del estado descripto por $\boldsymbol{\rho}$.

   El fotón se emite ahora con una probabilidad $1/2$ en el estado de polarización circular derecha, $|R\rangle$, y con probabilidad $1/2$ en el estado con polarización circular izquierda, $|L\rangle$, donde

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|X\rangle + i\,|Y\rangle\right), \qquad |L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|X\rangle - i\,|Y\rangle\right).$$

   d) Escribir el operador matriz densidad de los fotones generados mediante este mecanismo, primero en términos de los proyectores sobre los estados $|R\rangle$ y $|L\rangle$, y luego en términos de los proyectores sobre los estados con polarización lineal $|X\rangle$ y $|Y\rangle$. Asimismo, escribir las matrices del operador matriz densidad en estas dos bases.

   e) Si sus cálculos son correctos, habrá notado que los dos mecanismos de producción generan el mismo estado. Demostrar que en cualquier base ortonormal, el método de producción puede describirse como una mezcla $50\% - 50\%$ de cada elemento de la base.

2. Un polarizador perfecto emite partículas de espín $1/2$ con proyección del espín $+1/2$ según un versor $\mathbf{u}$, definido por los ángulos polares θ y φ. En términos de la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ asociada al operador s_z, las partículas emitidas por el polarizador están en el estado

$$|\Psi_{\mathbf{u}}\rangle = \cos\tfrac{\theta}{2}\, e^{-i\varphi/2}\,|+\rangle + \sin\tfrac{\theta}{2}\, e^{i\varphi/2}\,|-\rangle\,.$$

   (a) Escribir la matriz densidad del estado $|\Psi_{\mathbf{u}}\rangle$ en la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$.

   (b) Calcular $\boldsymbol{\rho}^2$ y comparar con $\boldsymbol{\rho}$.

   (c) ¿Cuál es la entropía de von Neumann asociada a esta matriz densidad?

   (d) Un horno emite partículas de espín un medio, sin favorecer ninguna dirección en particular. Es decir, la densidad de probabilidad de que una partícula sea emitida con polarización positiva según la dirección de cualquier versor $\mathbf{u}$ es constante e igual a $1/4\pi$. Puede decirse entonces que el estado cuántico de este ensamble de partículas es una mezcla estadística homogénea de los estados $|\Psi_{\mathbf{u}}\rangle$. Escribir la matriz densidad del ensamble de partículas emitidas por el horno y calcular su entropía de von Neumann.

   (e) Calcular los valores medios de los operadores s_x, s_y y s_z en el estado descripto en el ítem anterior.

3. Un estado mezcla de una partícula de espín $1/2$ se define del siguiente modo: con probabilidad $1/2$ la partícula es preparada en el estado $|+\rangle$, y con probabilidad $1/2$ en el estado $(|+\rangle + |-\rangle)/\sqrt{2}$. Escribir la matriz densidad en la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ y calcular la entropía. Dar la composición del estado mezcla en términos de los autovectores de la matriz densidad.

4. Los estados estacionarios de un espín $1/2$ en un campo magnético $\mathbf{B} = B_0\,\hat{z}$ son los autovectores $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ del operador s_z. Sus autoenergías son $E_\pm = \pm\hbar\omega_0/2$, con $\omega_0 = -\gamma B_0$, donde γ es el factor giromagnético. En equilibrio a temperatura T, el operador matriz densidad es

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{e^{-\mathbf{H}/k_{\mathrm{B}}T}}{Z},$$

donde Z es la función de partición, definida de tal modo que $\boldsymbol{\rho}$ tenga traza unidad:

$$Z = \mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{-\mathbf{H}/\mathrm{k_B T}} \tag{1}$$

Escribir la representación del operador matriz densidad en la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, calcular los valores medios de los operadores s_x, s_y y s_z y la entropía.

5. La base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ describe un sistema elemental de dos niveles. Un sistema consta de dos de estos sistemas elementales. El estado del sistema compuesto es el estado puro

$$|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle_A\,|1\rangle_B + |1\rangle_A\,|0\rangle_B\,\big),$$

donde las letras A y B distinguen a cada subsistema elemental.

   (a) Escribir la matriz densidad del sistema compuesto, $\boldsymbol{\rho}_{AB}$.

   (b) Escribir las matrices reducidas de cada sistema, $\boldsymbol{\rho}_A$ y $\boldsymbol{\rho}_B$. ¿Se trata de matrices que corresponden a estados puros o mezcla?

   (c) Ídem para el estado compuesto

$$|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{2}\big(\,|1\rangle_A\,|1\rangle_B + |1\rangle_A\,|0\rangle_B + |0\rangle_A\,|1\rangle_B + |0\rangle_A\,|0\rangle_B\,\big).$$

6. Problema 9.11 del libro de Peres, pág. 281.