# 2. Leyes de la dinámica y leyes de conservación

## □ 2.1. Leyes de la dinámica

### 2.1.1 Ley de inercia

Para describir el movimiento de un cuerpo, en primer lugar debemos elegir un sistema de referencia. La elección del sistema de referencia siempre es arbitraria, y la descripción del movimiento de un cuerpo respecto de distintos sistemas de referencia será, claro está, diferente. Si el sistema de referencia se halla fijo al mismo cuerpo cuyo movimiento queremos describir, el cuerpo se encontrará en reposo respecto del sistema de referencia elegido, pero se moverá respecto de *otros* sistemas de referencia. A su vez, la trayectoria que sigue el cuerpo será distinta, según los distintos sistemas de referencia. En principio, los diferentes sistemas de referencia son igualmente admisibles en el estudio del movimiento de cualquier cuerpo. Sin embargo, sería deseable que la descripción del movimiento fuera la más sencilla, y por lo tanto es natural elegir el sistema de referencia con este criterio.

Supongamos que un cuerpo se encuentra tan alejado de otros cuerpos que puede considerarse libre de toda interacción con ellos; en otras palabras, este cuerpo se mueve libremente. Si elegimos como sistema de referencia el sistema ligado a dicho cuerpo, respecto de dicho sistema *los movimientos de otros cuerpos libres serán rectilíneos y uniformes.* Esto se conoce como *ley de inercia.* Esta ley fue descubierta por Galileo, y constituye el punto de partida en la construcción de la física, tal como la entendemos hoy.

El sistema de referencia ligado a un cuerpo que se desplaza libremente se denomina *sistema inercial;* la descripción del movimiento de los cuerpos libres, desde tal sistema de referencia, resulta la más simple. En general, en este texto, trabajaremos en sistemas de referencia inerciales, es decir, las leyes que enunciemos serán válidas en dichos sistemas. Señalaremos explícitamente cuando no sea así.

### 2.1.2 Relación entre la fuerza y la variación de la velocidad

Una vez establecido que el movimiento rectilíneo y uniforme corresponde a la ausencia de interacciones, queda claro que las fuerzas sobre un cuerpo no se relacionan directamente con su velocidad, sino con las *variaciones* de la misma. La pregunta que surge entonces es: ¿cuál es la relación precisa que existe entre la fuerza neta *(la fuerza resultante)* sobre un cuerpo y la variación de velocidad que el mismo experimenta? Acerca de esto, la experiencia muestra básicamente dos cosas: 1) para producir una dada variación de la velocidad de un cuerpo, la fuerza aplicada sobre el mismo debe ser tanto mayor, cuanto menor es el tiempo durante el que actúa, y 2) para producir una dada variación de la velocidad en un dado tiempo, la fuerza aplicada sobre un cuerpo tiene que ser mayor, cuanto mayor es su masa. Estos dos hechos son consistentes con la ley de Newton que establece la igualdad entre la fuerza resultante o suma de fuerzas $\Sigma \vec{F}$ y el producto de la masa m de un cuerpo por su aceleración $\vec{a} = d\vec{v}/dt$, donde $d\vec{v}$ es la variación de la velocidad en el intervalo de tiempo dt. Es decir:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \tag{2.1}$$

Observemos que la fuerza resultante tiene la dirección y sentido de la variación de la velocidad, y no de la velocidad misma. En el caso particular en que $\Sigma \vec{F}$ es paralela a la velocidad del cuerpo, entonces $d\vec{v}$ también lo es, y el resultado es un cambio del módulo de la velocidad, sin variación de la dirección: si llamamos F al valor de la fuerza resultante, en este caso particular es $F = mdv/dt$, donde v es el valor de la velocidad. Si, en cambio, $\Sigma \vec{F}$ es perpendicular a la velocidad, entonces $d\vec{v}$ es perpendicular a $\vec{v}$, y por lo tanto, solamente varía la dirección del movimiento (el movimiento es curvilíneo), sin cambiar la rapidez del mismo: si llamamos F al valor de la resultante, tendremos para este caso que $F = mv^2/r$, donde r es el radio de la curva descripta y $v^2/r$ es el valor de la aceleración radial o centrípeta.

## 2.1.3 Acción y reacción

Las variaciones de las velocidades de los cuerpos en interacción mutua no son independientes, sino que están relacionadas. En el caso de un conjunto de dos cuerpos A y B que interactúan solamente entre ellos, la experiencia muestra que las variaciones de velocidad $d\vec{v}_A$ y $d\vec{v}_B$ tienen la misma dirección y sentidos opuestos, y el cociente de sus valores absolutos es inversamente proporcional al cociente entre sus masas: $dv_A/dv_B = m_B/m_A$. Así, dada la definición de la aceleración como el cociente entre $d\vec{v}$ y dt, se tiene que $m_A\vec{a}_A = -m_B\vec{a}_B$. Por lo tanto, de acuerdo con lo establecido en la sección anterior, las fuerzas sobre los cuerpos A y B cumplen que:

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B \tag{2.2}$$

Entonces, es imposible ejercer una acción sobre un cuerpo sin recibir una reacción del mismo. Muchas veces este hecho permanece inadvertido. Esto suele ocurrir cuando una de las masas involucradas es mucho mayor que la otra, porque entonces las aceleraciones son muy diferentes, hasta tal punto, que la del cuerpo de mayor masa puede resultar imperceptible.

## 2.1.4 Unidades

Dada la relación existente entre fuerza, masa y aceleración, está claro que las unidades de la fuerza deben ser iguales al producto de las unidades en que se mide la masa por las unidades en que se mide la aceleración: [4] [F] = [m][a]. Como la aceleración se mide en unidades de velocidad divididas por unidades de tiempo, entonces [F] = [m][v]/[t]. Si la masa se mide en kilogramos, la velocidad en metros/segundo y el tiempo en segundos, tenemos que [F] = kg m/s$^2$. Esta unidad de fuerza se denomina *Newton.* Si, en cambio, medimos la masa en gramos, el tiempo en segundos y la velocidad en centímetros/segundo, tenemos que [F] = g cm/s$^2$. Esta unidad se conoce como *dyna.* Observemos que, como 1m = 100 cm y 1 kg = 1.000 g, entonces 1 dyna = $10^{-5}$ Newton.

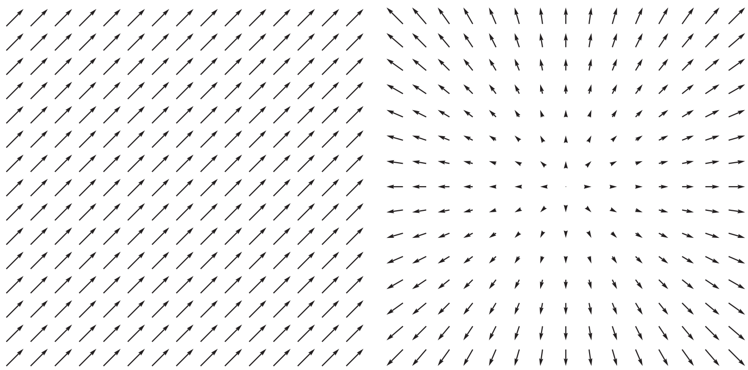

***Figura 2.1.*** *Izquierda: campo de fuerzas uniforme. Derecha: campo de fuerzas no uniforme $\vec{F} = (x, y)$.*

# □ 2.2. Energía

## 2.2.1 Trabajo y energía cinética

Supongamos que durante el movimiento de un cuerpo, sobre el mismo actúa una fuerza $\vec{F}$ dada en cada punto del espacio. El conjunto de todos los vectores fuerza correspondientes a cada punto se suele denominar *campo de fuerzas.* Dichos vectores pueden ser diferentes de un punto a otro del espacio, y además, pueden depender del tiempo, de modo que podemos escribir $\vec{F} = (F_x(x, y, z, t); F_y(x, y, z, t); F_z(x, y, z, t))$. En la figura 2.1 izquierda se muestra un ejemplo de un campo de fuerzas uniforme, es decir, cuyo valor, dirección y sentido son los mismos en cada punto. En la figura 2.1 derecha, se muestra un caso más general, donde tanto el valor absoluto como la dirección y sentido del vector correspondiente a cada punto son diferentes. Los dos casos graficados son estáticos, es decir, tales campos de fuerzas no cambian con el tiempo.

Consideremos entonces, el movimiento de un cuerpo de masa m bajo la acción de un campo $\vec{F}$. La magnitud:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (2.3)$$

[4] Indicamos las unidades de una magnitud x como [x].

donde $d\vec{r}$ es el vector correspondiente a un desplazamiento muy pequeño (en rigor, infinitesimal) del cuerpo, se define como el trabajo de $\vec{F}$ en el desplazamiento $d\vec{r}$. Como $\vec{F} \cdot d\vec{r} = Fdr \cos\alpha$ donde $\alpha$ es el ángulo entre la fuerza y el desplazamiento [5], podemos escribir:

$$dL = F_T\, dr \tag{2.4}$$

donde $F_T = F \cos\alpha$ es la proyección de la fuerza en la dirección del desplazamiento. Si $\vec{F}$ es la única fuerza (o la resultante de fuerzas) que actúa sobre el cuerpo, de acuerdo con las leyes de la dinámica:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{2.5}$$

y como la proyección de la aceleración en la dirección del movimiento es dv/dt, donde v es el módulo de la velocidad, entonces:

$$F_T = m\frac{dv}{dt} \tag{2.6}$$

Reemplazando a $F_T$ en la fórmula (2.4)

$$dL = m\,\frac{dv}{dt}\,dr \tag{2.7}$$

de manera que, escribiendo el desplazamiento infinitesimal dr como vdt, y cancelando los dt de numerador y denominador, se obtiene:

$$\begin{aligned} dL &= m\, dv\, v \\ &= d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Esto significa que el trabajo es igual a la variación de la magnitud ½ $mv^2$, que se denomina *energía cinética.* Así, encontramos otra forma de expresar que la acción de una fuerza se relaciona con la variación de la velocidad de un cuerpo. En particular, de esta manera queda claro que una fuerza perpendicular al desplazamiento no genera variación en el valor de la velocidad (sino solamente en la dirección de la misma). Notemos que, de haber varias fuerzas actuando sobre el mismo cuerpo, su variación de energía cinética vendrá dada por el trabajo de la resultante de dichas fuerzas. Finalmente, observemos que para determinar el trabajo L en un recorrido no infinitesimal hay que dividir dicho recorrido en desplazamientos infinitesimales y sumar los trabajos asociados con todos esos desplazamientos. Es decir, en general hay que calcular la integral de $\vec{F}$ a lo largo del camino. Un caso particular en que no es necesario calcular la integral, es el de un campo de fuerzas constante y uniforme, esto es, un campo que no depende del tiempo ni de la posición. Entonces, el trabajo se determina simplemente como el producto $\vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F\Delta r \cos\alpha$, donde $\Delta\vec{r}$ es el desplazamiento total.

[5] El producto escalar entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se define, en coordenadas cartesianas, como $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = AB\cos\alpha$, donde $\alpha$ es el ángulo entre ambos vectores.

## 2.2.2 Energía potencial y conservación de la energía

Consideremos ahora el caso particular de un campo de fuerzas que no depende del tiempo *(campo estacionario)* [6], con la siguiente propiedad, muy importante: si bajo la acción de este campo un cuerpo se desplaza a lo largo de una trayectoria cerrada (es decir que vuelve al punto de partida), el trabajo a lo largo de dicha trayectoria es nulo. Tomemos entonces dos puntos 1 y 2 del espacio, y supongamos que un cuerpo se desplaza bajo la acción de un campo estacionario en una trayectoria cerrada que lo lleva de 1 a 2 por el camino A, y de nuevo a 1, por el camino B (véase la figura 2.2). Evidentemente, podemos escribir:

$$L_{1A2} + L_{2B1} = 0 \tag{2.9}$$

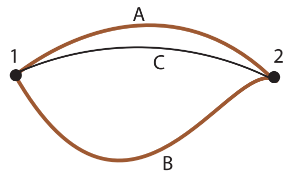


***Figura 2.2.*** *Posibles caminos (A,B,C) para ir de 1 a 2.*

ya que esta suma es el trabajo total en un recorrido de ida y vuelta que empieza y termina en el punto 1. Así, podemos afirmar que $L_{2B1} = -L_{1A2}$. Pero por la definición de trabajo, es claro que $L_{2B1} = -L_{1B2}$, de donde se deduce que:

$$\begin{aligned} L_{1A2} &= -L_{2B1} \\ &= L_{1B2} \end{aligned} \tag{2.10}$$

es decir, que el trabajo del campo estacionario entre dos puntos dados es independiente del camino considerado. En particular, si uno de esos puntos se elige como el origen, entonces a cada punto $\vec{r}$ del espacio se puede asignar una cantidad que es igual al trabajo realizado por el campo al llevar al cuerpo desde el origen hasta ese punto. Es usual definir ese trabajo como $-U(\vec{r})$, donde $U(\vec{r})$ es la llamada *energía potencial.* Con esta definición, el trabajo realizado por el campo entre dos puntos cualesquiera será la diferencia de energía potencial entre ellos cambiada de signo: $L = -\Delta U$. Para un desplazamiento infinitesimal se tiene que $dL = -dU$. De esta manera, si combinamos esta relación con la que establece la igualdad entre el trabajo y la variación de la energía cinética del cuerpo, obtenemos $-dU = d(mv^2/2)$, de donde:

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2 + U\right) = 0 \tag{2.11}$$

Entonces, hemos demostrado que para un cuerpo que se mueve bajo la acción de un campo estacionario la magnitud $\frac{1}{2}mv^2+U$ permanece constante. Dicha magnitud, que es la suma de la energía potencial y la energía cinética, se llama *energía mecánica.* Designándola como E, podemos escribir:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + U(\vec{r}) \\ &= \text{constante} \end{aligned} \tag{2.12}$$

que expresa la conservación de la energía para un cuerpo bajo la acción de un campo de fuerzas estacionario. Cuando hay varios cuerpos puntuales en movimiento e interactuando

[6] Un ejemplo conocido de dicha clase de campo es el gravitatorio asociado a un cuerpo en reposo.

solamente entre ellos (los cuerpos forman un *sistema cerrado*), también es válida la ley de conservación de la energía [7]. En ese caso se tiene:

$$E = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \ldots + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots)$$
$$= \text{constante} \qquad (2.13)$$

donde el subíndice indica cada cuerpo del sistema. Es importante en este punto notar lo siguiente: De las relaciones $dL = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, $dL = -dU$ se deduce que la fuerza se obtiene de la energía potencial como $\vec{F} = -dU/d\vec{r}$, donde la derivada respecto del vector posición $\vec{r}$ se entiende, en coordenadas cartesianas, como el vector de componentes iguales a las derivadas respecto de cada coordenada: $F_x = -dU/dx$, $F_y = -dU/dy$; $F_z = -dU/dz$. En general, para el caso de varios cuerpos en interacción, se tiene que la fuerza sobre uno de ellos (digamos el i-ésimo) está dada por el vector formado por las derivadas, cambiadas de signo, de la energía potencial respecto de las coordenadas del cuerpo dado, dejando las de los demás fijas:

$$\vec{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \qquad (2.14)$$

Utilizamos la notación $\partial$ en lugar de la d para indicar que la derivada se calcula tomando como variables solamente las coordenadas del cuerpo i-ésimo, sin variar las de los demás.

## 2.2.3 Unidades

De acuerdo con su definición, las dimensiones del trabajo y de la energía son iguales. Las unidades en que se las mide se obtienen de reemplazar en sus definiciones las unidades de las magnitudes involucradas. En cualquier caso, las unidades deben ser el producto de unidades de masa por el cuadrado de unidades de velocidad, es decir: $[L] = [E] = [m][v]^2$. Si medimos la masa en kilogramos y la velocidad en metros/segundo, entonces $[L] = [E] = kg\ m^2/s^2$. Esta unidad se conoce como *Joule.* También es usual medir la masa en gramos y la velocidad en centímetros/segundo. En ese caso se tiene $[L] = [E] = g\ cm^2/s^2$, y esta unidad se denomina *ergio.* Como 1m = 100 cm y 1 kg = 1.000 g, entonces 1 ergio = $10^{-7}$ Joule.

## 2.2.4 Movimientos limitados e ilimitados

Supongamos que el movimiento de un cuerpo se encuentra restringido a una sola dirección, de manera que su posición queda definida dando solamente una coordenada. Entonces,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) \qquad (2.15)$$

[7] Esto deja de ser cierto, en general, si entre los cuerpos existen interacciones que no pueden asociarse a una energía potencial, como es el caso de las fuerzas disipativas.

y la fuerza sobre el cuerpo se obtiene simplemente como F = -dU/dx. Como la energía cinética es, dada su definición, siempre mayor o igual que cero, entonces para una dada energía E (determinada por las condiciones iniciales, esto es, por la velocidad y posición iniciales) el movimiento del cuerpo es posible solamente mientras su posición x es tal que:

$$U(x) \leq E \tag{2.16}$$

Por lo tanto, dada una función U(x), los puntos donde E = U son *puntos límites (o puntos de retorno)* del movimiento, pues en ellos la velocidad es nula. Por ejemplo, supongamos que la energía potencial de un cuerpo que realiza un movimiento a lo largo del eje x es de la forma que se muestra en la figura 2.3. Entonces, para una energía E el movimiento sólo es posible entre $x_1$ y $x_2$, o más allá de $x_3$, que son los puntos límites. El movimiento entre $x_1$ y $x_2$ es limitado [8], mientras que el movimiento más allá de $x_3$ es ilimitado, ya que el cuerpo puede alcanzar cualquier distancia desde el origen, mientras la misma sea mayor o igual que la correspondiente a $x_3$.

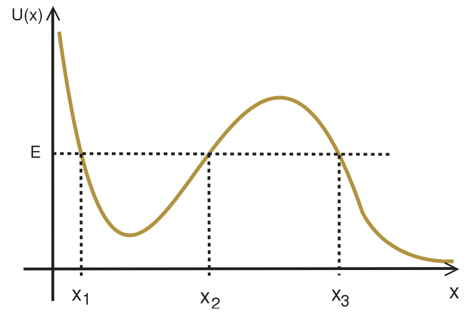


***Figura 2.3.*** *Energía potencial vs posición.*

- Ejemplo. Como sabemos, los núcleos atómicos están compuestos por protones y neutrones. La energía potencial U(r) de la interacción entre un núcleo atómico y un protón [9] es de la forma de la figura 2.4, donde r es la distancia del protón al centro del núcleo, y las unidades de la energía potencial son MeV = $10^6$ eV = $1{,}6.10^{-6}$ ergio. Queremos analizar qué ocurrirá con un protón que incide sobre el núcleo desde gran distancia (usualmente se dice "desde el infinito").

Recordemos que la energía total es la suma de la energía cinética y la energía potencial. En el infinito la energía potencial se anula, mientras que para penetrar en la región $r < r_0$, la energía cinética inicial del protón debe ser mayor que el máximo valor de la energía potencial en esa región: 10 MeV. A su vez, si el protón se encuentra en la región $r < r_0$, sólo podrá llegar a la región $r > r_0$ si su energía inicial es mayor a 10 MeV. Si, por el contrario, su energía es menor que 10 MeV, su movimiento estará limitado por el punto de retorno $r_0$. Supongamos ahora que tenemos un protón en r = 0 con energía 20 MeV y queremos determinar cuál es la velocidad que tendrá en $r = r_0$ y en el infinito. Al llegar a $r_0$ la energía potencial es de 10 MeV y por lo tanto, como la energía se conserva, la energía cinética es $E_c = m_p v_p^2/2$ = 10 MeV. La masa de un protón es de $m_p = 1{,}67 \times 10^{-24}$g y 10 MeV = $1{,}6 \times 10^{-5}$g cm$^2$/s$^2$. Luego:

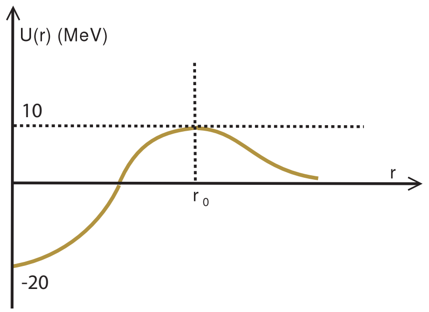


***Figura 2.4.*** *Energía potencial correspondientes a la interacción entre un núcleo atómico y un protón.*

$$v_p(r_0) = 4{,}38 \times 10^7 m/s \tag{2.17}$$

[8] También se dice finito o ligado.

[9] En realidad el problema es tridimensional, pero puede ser reducido al de un potencial efectivo unidimensional de la forma de la figura 2.4 (véase la sección 5).

A su vez, al llegar al infinito, la energía potencial se anula y toda la energía se convierte en energía cinética; por lo tanto $E_c = m_p v_p^2/2 = 20$ MeV y:

$$v_p(\infty) = 6,19 \times 10^7 \text{m/s} \tag{2.18}$$

## 2.2.5 Solución de un problema unidimensional. Ejemplos

En el caso de un movimiento unidimensional es posible resolver directamente el problema de determinar la evolución temporal, sin necesidad de pasar por las ecuaciones de la dinámica. En efecto, de la expresión de la energía (ecuación 2.15), escribiendo v = dx/dt se obtiene:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2(E - U(x))/m} \tag{2.19}$$

lo cual permite escribir la relación entre el tiempo y un desplazamiento pequeño (infinitesimal):

$$dt = dx\frac{\sqrt{m/2}}{\sqrt{E - U(x)}} \tag{2.20}$$

La evolución completa dada por x(t) resulta de integrar miembro a miembro esta igualdad.

1. Un caso de mucho interés y para el que resulta sencillo efectuar el cálculo es el de un cuerpo sometido a una fuerza restitutiva proporcional a la distancia a un punto fijo: F = -kx (el ejemplo más conocido es el de la fuerza elástica). Dicha fuerza se asocia a una energía potencial $U(x) = kx^2/2$, de manera que la energía es igual a

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 \tag{2.21}$$

   La energía potencial es una función cuadrática de x, de modo que para cualquier valor positivo de la energía el movimiento tendrá lugar entre dos puntos de retorno. Efectuando la integral para $U(x) = kx^2/2$, y reordenando el resultado [10], obtenemos (eligiendo el origen de t de modo que x(t = 0) = 0):

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}}\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) \tag{2.22}$$

   Este resultado nos permite, en particular, calcular el período; para ello basta con multiplicar por dos el tiempo que tarda el móvil en ir desde un punto de retorno al otro. Dichos puntos están dados por $E = U(x) = kx^2/2$, de modo que son $x = -\sqrt{2E/k}$ y $x = \sqrt{2E/k}$. Restando los instantes correspondientes a estas posiciones y multiplicando por dos obtenemos el período: $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

---

[10] Para el cálculo basta tomar de una tabla de integrales la igualdad. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{arcsen}\,\frac{x}{a} + \text{constante}.$

2. Una aplicación inmediata del resultado anterior es el cálculo del período de las oscilaciones pequeñas de un péndulo ideal, esto es, de un cuerpo puntual de masa m, suspendido de un hilo de longitud l, que oscila en un plano apartándose poco de la vertical. Si llamamos $\theta$ al ángulo del hilo con la vertical, la velocidad del cuerpo es $l\,\Omega = l\,d\theta/dt$, donde $\Omega$ es la velocidad angular; por lo tanto, la energía cinética es $\frac{1}{2}ml^2(d\theta/dt)^2$. Si tomamos el punto más bajo de la trayectoria del péndulo (ver figura 2.5) como el nivel en que la energía potencial gravitatoria mgy se anula, entonces $U = mg(l - l\cos\theta)$ (ver figura 2.5). Si el ángulo máximo alcanzado en las oscilaciones es pequeño, podemos aproximar $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$, y usando que $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, tenemos que $\cos^2\theta \approx 1 - \theta^2$. Pero si $\theta << 1$ (eso quiere decir, justamente, que el ángulo sea pequeño), podemos usar la aproximación [11] $(1-\varepsilon)^{1/2} \approx 1 - \varepsilon/2$, de modo que $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$ y la energía del cuerpo es, aproximadamente:

$$E = \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m\,g\,l\,\theta^2 \qquad (2.23)$$

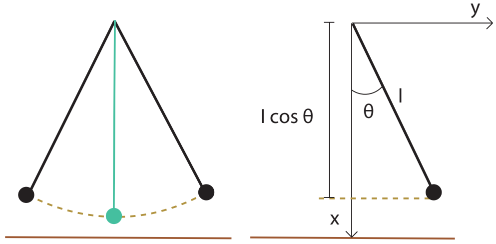


***Figura 2.5.*** *Izquierda: Trayectoria del péndulo; en azul el punto más bajo de la trayectoria. Derecha: Definición de θ, ángulo entre la vertical y la posición del péndulo.*

Se ve que, aparte del nombre de la variable ($\theta$ en lugar de x), esta expresión es análoga a la del caso anterior, con la sustitución de $ml^2$ en lugar de m, y de mgl en lugar de k. Por lo tanto, la solución del problema es simplemente:

$$\theta(t) = \sqrt{\frac{2E}{mgl}}\,\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) \qquad (2.24)$$

La analogía con el ejemplo anterior permite hallar de inmediato el período: $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Vemos que -bajo la aproximación de oscilaciones pequeñas- el período solamente depende de la longitud del péndulo y de la gravedad. No depende, en cambio, de la amplitud de las oscilaciones, es decir, del ángulo máximo alcanzado; tampoco depende de la masa del péndulo. Este hecho había sido observado ya por Galileo, mucho antes de que encontrara su explicación, a partir de las leyes de la dinámica o las leyes de conservación.

## □ 2.3. Impulso

El espacio es homogéneo (es decir, todas las posiciones son equivalentes), y por lo tanto, la evolución de un sistema cerrado debe ser independiente de que se traslade al sistema como un todo de una región del espacio a otra. En otras palabras, la evolución de los cuerpos de un sistema cerrado sólo puede depender de sus posiciones relativas. Como la evolución está determinada por las fuerzas sobre los cuerpos, y las fuerzas se obtienen de la energía potencial, para que esta condición se cumpla la energía potencial de un sistema cerrado debe depender solamente de las diferencias entre las coordenadas de los cuerpos del mismo. Consideremos, por simplicidad, el caso de un sistema formado por sólo dos cuerpos.

Entonces: $$U = U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \qquad (2.25)$$

[11] En general, para x pequeño $|x| << 1$ una primera aproximación es $(1 + x)^r = (1 + rx)$.

Esta forma de la dependencia con las coordenadas tiene una consecuencia importante: como es fácil comprobar, se cumple que:

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_2} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_1} \tag{2.26}$$

de modo que $-\vec{F}_2 = \vec{F}_1$ (de acuerdo con la ley de acción y reacción), y por lo tanto:

$$-m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt} = m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} \tag{2.27}$$

De aquí se desprende que:

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = 0 \tag{2.28}$$

Esto significa que la cantidad:

$$\begin{aligned}\vec{P} &= m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \\ &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2\end{aligned} \tag{2.29}$$

que llamamos *impulso* o *cantidad de movimiento* del sistema formado por ambos cuerpos se mantiene constante. La extensión de esta definición al caso de un sistema de más de dos cuerpos es inmediata: $\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots$

El cociente entre el impulso y la suma de las masas define una velocidad constante:

$$\vec{V} = \frac{\vec{P}}{m_1 + m_2} \tag{2.30}$$

con la siguiente propiedad evidente: si el movimiento de los dos cuerpos se describe desde un sistema de referencia que se mueve con $\vec{V}$, entonces el impulso $\vec{P}$ es nulo respecto de dicho sistema. Pero como $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = d/dt\,(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)$, eso significa que el vector:

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 \tag{2.31}$$

es constante, y por lo tanto puede elegirse el origen del sistema de referencia de manera tal que $m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0$. Dicho origen es el del llamado *sistema de referencia del centro de masa.*

## □ 2.4. Impulso angular

Así como la homogeneidad del espacio implica la conservación del impulso para un sistema cerrado, la isotropía (es decir la equivalencia de todas las direcciones) tiene como consecuencia la conservación de otra magnitud vectorial. Dicha magnitud es el impulso angular [12], que se define para un cuerpo puntual como:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{2.32}$$

[12] También llamado momento angular, *momento cinético o cantidad de movimiento angular.*

donde $\vec{r}$ es el vector posición del cuerpo, respecto de un punto elegido como centro de momentos. El centro de momentos elegido no necesariamente debe coincidir con el origen de coordenadas; el vector $\vec{M}$ depende de la elección realizada (ver problemas). El símbolo x indica el producto vectorial [13] de manera que el valor del impulso angular es igual a $M = r\,p\,\mathrm{sen}\theta$, donde $\theta$ es el ángulo entre el vector posición y el vector impulso. Para un sistema de varios cuerpos, la definición se generaliza de manera natural como:

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 + \dots \qquad (2.33)$$

donde es usual (y conveniente) tomar como origen el centro de masa del sistema. Consideremos un sistema cerrado formado por dos cuerpos puntuales, de manera que el impuso angular es $\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2$, y calculemos su derivada respecto del tiempo:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d\vec{r}_1}{dt} \times \vec{p}_1 + \vec{r}_1 \times \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{r}_2}{dt} \times \vec{p}_2 + \vec{r}_2 \times \frac{d\vec{p}_2}{dt} \qquad (2.34)$$

Como $d\vec{r}/dt$ es la velocidad $\vec{v}$ de cada cuerpo, y a su vez $\vec{p} = m\vec{v}$, entonces el primer término y el tercero de la suma son nulos, y queda:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{r}_1 \times \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \vec{r}_2 \times \frac{d\vec{p}_2}{dt} \qquad (2.35)$$

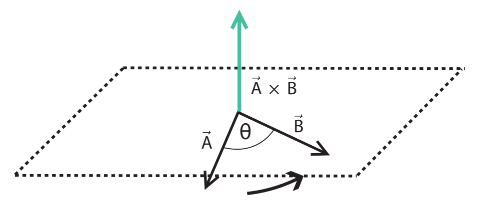


*Figura 2.6.* *Representación gráfica del producto vectorial.*

Pero $d\vec{p}/dt = m\,d\vec{v}/dt$ es la fuerza $\vec{F}$ sobre cada cuerpo ejercida por el otro (recordemos que el sistema es cerrado), de manera que de acuerdo con la ley de acción y reacción (o por la conservación del impulso $\vec{p}$ del sistema) se tiene $d\vec{p}_1/dt = \vec{F} = -dp_2/dt$, y entonces:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{M}}{dt} &= \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}) \\ &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F} \end{aligned} \qquad (2.36)$$

Ahora bien, la isotropía del espacio implica que la energía potencial no puede depender de la orientación del sistema en el espacio, sino solamente de la distancia entre los dos cuerpos; así:

$$\begin{aligned} U &= U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \\ &= U(r) \end{aligned} \qquad (2.37)$$

donde $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$. Por lo tanto, $dU = 0$ para desplazamientos cualesquiera $d\vec{r}_1$ o $d\vec{r}_2$ que mantengan constante la distancia $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$, es decir para $dr_1$ o $dr_2$ perpendiculares al vector $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Como $dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$, esto significa que $\vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ para tales desplazamientos, lo cual implica que los vectores $\vec{F}_1 = \vec{F}$ y $\vec{F}_2 = -\vec{F}$ son paralelos al vector $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Como consecuencia, el producto vectorial es nulo, y queda demostrado que para un sistema cerrado resulta $d\vec{M}/dt = 0$, es decir que $\vec{M}$ es constante.

[13] El producto vectorial entre dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se define, en coordenadas cartesianas, como $\vec{A} \times \vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y, A_zB_x - A_xB_z, A_xB_y - A_yB_x)$, y su valor absoluto es igual a $AB\,\mathrm{sen}\theta$, donde $\theta$ es el ángulo entre ambos vectores. El vector $\vec{A} \times \vec{B}$ es perpendicular al plano que contiene a $\vec{A}$ y $\vec{B}$, y su sentido puede determinarse por la siguiente regla: si giramos el vector $\vec{A}$ hacia el $\vec{B}$ e imaginamos un tornillo que realiza el mismo giro, el sentido de avance del tornillo es el mismo de $\vec{A} \times \vec{B}$. Véase la figura 2.6

Si se considera el caso de un único cuerpo, la derivada temporal de su impulso angular respecto de un punto dado es simplemente:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (2.38)$$

donde $\vec{F}$ es la fuerza sobre el cuerpo. La magnitud vectorial $\vec{r} \times \vec{F}$ se suele llamar *momento* de la fuerza $\vec{F}$ ; el origen de $\vec{r}$ se toma en el centro de momentos elegido. La discusión anterior permite inferir que si la fuerza es paralela al vector $\vec{r}$ entonces $\vec{M}$ se mantendrá constante. Es claro que, en particular, siempre que la energía potencial sea de la forma U(r) dicha condición se cumplirá; un campo tal que U = U(r) se denomina *campo central.*

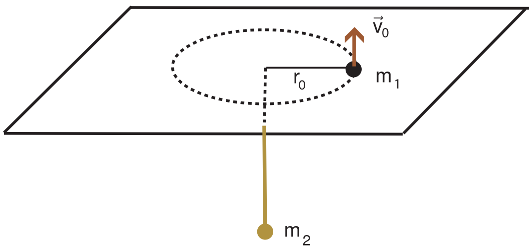


***Figura 2.7.*** *Esquema del problema de dos masas unidas por un hilo que pasa por un orificio en una mesa horizontal.*

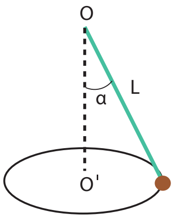


***Figura 2.8.*** *Péndulo cónico.*

## □ Problemas

Problema 1: El sistema de la figura 2.7 consiste de dos masas $m_1$ y $m_2$ unidas por un hilo inextensible que pasa por un orificio practicado en una mesa horizontal sin rozamiento. En cierto instante, la masa $m_2$ está en reposo y la masa $m_1$ se mueve con velocidad tangencial $v_0$ a una distancia $r_0$ del orificio. La masa $m_2$ puede o no continuar en reposo dependiendo de la relación matemática entre $m_1$, $m_2$, $v_0$, $r_0$ y g.

i) Determinar la relación para que $m_2$ permanezca en reposo.
ii) Suponiendo ahora que $m_2$ tiene velocidad no nula, calcular las velocidades de ambas partículas cuando la masa $m_2$ ha descendido una distancia d. Se supone que el hilo tiene una masa mucho más pequeña que $m_1$ y $m_2$.

Problema 2. En la figura 2.8 se muestra un péndulo cónico de masa m y longitud L que forma un ángulo α con la dirección vertical. Se quiere analizar si se conserva el impulso angular desde los centros de momentos O y O'.

# 2.5. Movimiento en un campo central

## 2.5.1 El problema de dos cuerpos

Consideremos, desde el sistema de referencia del centro de masa, el problema del movimiento de dos cuerpos que sólo interactúan el uno con el otro. Como ya vimos, respecto de ese sistema se tiene

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0 \qquad (2.39)$$

y el impulso es nulo:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0 \qquad (2.40)$$

Por lo tanto, si definimos $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ y la correspondiente velocidad relativa $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, se obtiene que:

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \qquad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \tag{2.41}$$

y análogamente:

$$\vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v} \qquad \vec{v}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v} \tag{2.42}$$

Si reemplazamos estas últimas expresiones en la fórmula de la energía $E = m_1 v_1^2/2 + m_2 v_2^2/2 + U(r)$ (donde r es la distancia $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ entre los cuerpos), obtenemos:

$$E = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}v^2 + U(r) \tag{2.43}$$

De esta manera, la energía del sistema es igual a la de un solo cuerpo de masa $m = m_1 m_2 (m_1 + m_2)^{-1}$ moviéndose en un campo exterior de energía potencial U(r). Esto simplifica considerablemente el problema de determinar la evolución de los dos cuerpos: basta con resolver el problema de un único cuerpo de masa m sujeto a una fuerza $\vec{F} = -dU/d\vec{r}$, es decir, el problema de un cuerpo en un campo central. Una vez hallada la solución $\vec{r}(t)$, la solución del problema original se obtiene a partir de las fórmulas que relacionan dicho vector con las posiciones $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ de cada cuerpo. Observemos que de dichas fórmulas se deduce que $r_1/r_2 = m_2/m_1$, de modo que los dos cuerpos realizan trayectorias semejantes alrededor del centro de masa, con distancias al mismo inversamente proporcionales a sus masas.

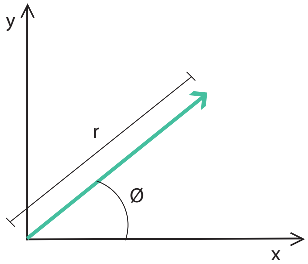


***Figura 2.9.*** *Definicion de las coordenadas polares r y Ø.*

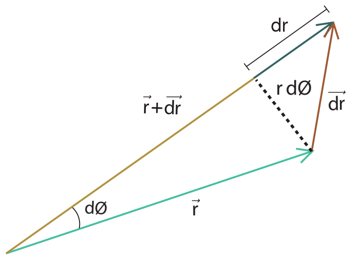


***Figura 2.10.*** *Variación infinitesimal del vector $\vec{r}$.*

## 2.5.2 Energía

Como ya hemos señalado, en el movimiento de un cuerpo puntual en un campo central, es decir asociado a una energía potencial U(r) donde r es la distancia al centro del campo, se mantiene constante el vector $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{P}$. Como $\vec{M}$ es perpendicular a $\vec{r}$, de la constancia de $\vec{M}$, deducimos que el vector posición del cuerpo se mantiene en un plano, el perpendicular al impulso angular. Como la trayectoria del cuerpo está contenida en un plano, bastan dos coordenadas para definir su posición. Si se trabaja en coordenadas cartesianas, la posición viene dada por x e y, y el cuadrado de la velocidad, necesario para escribir la energía cinética, es igual a $v^2 = v_x^2 + v_y^2$. Es más conveniente, sin embargo, trabajar en términos de las coordenadas polares. Definimos r como la distancia al origen de coordenadas y ø como el ángulo del vector posición respecto de algún eje cartesiano, por ejemplo el x (ver figura 2.9). Elegimos el origen de coordenadas en el centro del campo porque es la elección que permite describir el movimiento de manera más simple en el caso de un campo central. De esa manera, el cuadrado de la velocidad es

$v^2 = v_r^2 + v_t^2$, donde $v_r = dr/dt$ es la velocidad radial (correspondiente a la variación de la distancia al centro), y $v_t = rd\text{ø}/dt = r\Omega$ es la velocidad tangencial ($\Omega$ es la velocidad angular), que corresponde al desplazamiento perpendicular al vector $\vec{r}$ (véase la figura 2.10).

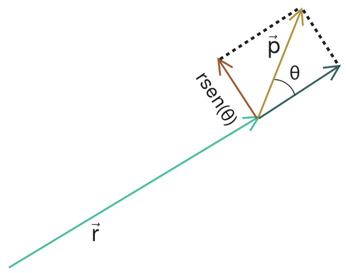


***Figura 2.11.*** *Esquema del producto vectorial $\vec{r} \times \vec{p}$; la proyección de $\vec{p}$ en la dirección tangencial es proporcional a la velocidad tangencial.*

Así, la energía del cuerpo es:

$$E = \frac{1}{2} m \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\text{ø}}{dt} \right)^2 \right] + U(r) \quad (2.44)$$

La expresión $M = r\,p\,\text{sen}\,\theta$, con $\theta$ el ángulo entre el vector posición y el vector impulso p, implica que el valor del impulso angular está dado por el producto entre la distancia al centro y la proyección de $\vec{p}$ en la dirección perpendicular a $\vec{r}$. Pero dicha proyección es $mv_t = mrd\text{ø}/dt$ = (véase la figura 2.11), de manera que:

$$M = mr^2 \frac{d\text{ø}}{dt} \quad (2.45)$$

Esta relación permite, dada la constancia de M, eliminar la velocidad angular de la expresión para la energía; en efecto, escribiendo $d\text{ø}/dt = M/(mr^2)$ y reemplazando, se obtiene:

$$E = \frac{1}{2} m \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) \quad (2.46)$$

Es decir que, gracias a la conservación del impulso angular, la energía puede escribirse en términos de solamente la distancia al centro y su derivada respecto del tiempo. La expresión hallada para la energía permite, desde el punto de vista formal, considerar a la parte radial del problema como un movimiento lineal en un campo de energía potencial efectiva:

$$U_{ef}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) \quad (2.47)$$

donde el primer término del miembro derecho suele denominarse *energía potencial centrífuga.* Entonces:

$$E = \frac{1}{2} m \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + U_{ef}(r) \quad (2.48)$$

La analogía con el problema unidimensional permite de inmediato deducir que, para una dada energía E determinada por las condiciones iniciales, el movimiento sólo tendrá lugar en la región del espacio donde $U_{ef} \leq E$. Los valores de r tales que $U_{ef} = E$ serán los límites del movimiento, en los cuales la velocidad radial dr/dt se anula. Por supuesto, eso no significa que el cuerpo se encuentre instantáneamente en reposo, pues la constancia de M implica que la velocidad angular $\Omega = d\text{ø}/dt$ no se anula (y por lo tanto tampoco cambia de signo).

## 2.5.3 Caída al centro

El hecho de que uno de los términos del potencial efectivo se haga ilimitadamente grande cuando se reduce la distancia al centro, hace que no sea siempre posible para el cuerpo alcanzar dicho punto, aún cuando el campo central sea atractivo. ¿Cuándo será posible para un cuerpo alcanzar el centro? La pregunta puede formularse de manera más precisa: se trata de hallar qué comportamiento con la distancia al centro debe tener una energía potencial asociada a un campo atractivo para que sea posible que el cuerpo alcance r = 0. La solución se obtiene a partir de que:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = E - \frac{M^2}{2mr^2} - U(r) > 0 \qquad (2.49)$$

de modo que

$$r^2U(r) + \frac{M^2}{2m} < E\, r^2 \qquad (2.50)$$

Pero el miembro derecho de esta desigualdad tiende a cero cuando la distancia al centro tiende a cero. Por lo tanto, para que sea posible alcanzar el centro, la cantidad $r^2U(r)$ debería ser negativa y de valor absoluto mayor que $M^2/2m$; esta condición se cumple si U(r) es de la forma $-\alpha/r^2$ con $\alpha$ positivo y de valor mayor que $M^2/2m$, o si U(r) es de la forma $-1/r^p$ con p mayor que 2.

## 2.5.4 Velocidad areolar y segunda ley de Kepler

La conservación del impulso angular y, en particular, la de su valor, admite una interpretación sencilla. En efecto, si observamos que durante un desplazamiento infinitesimal asociado con un ángulo dø el vector posición barre un sector de área dA = ½r rdø(véase la figura 2.12), entonces es natural definir el cociente entre esa área y el tiempo como la *velocidad areolar.*

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\phi}{dt} \qquad (2.51)$$

de manera que el valor del impulso angular $M = mr^2 d\phi/dt$ se puede escribir como:

$$M = 2m\frac{dA}{dt} \qquad (2.52)$$

Así, la conservación del impulso angular se asocia con la constancia de la velocidad areolar, esto es, con el hecho de que la posición de un cuerpo en un campo central barre áreas iguales en tiempo iguales. Es interesante notar que, en el caso del movimiento de los planetas alrededor del Sol, este hecho fue ya observado por Kepler (ver cap. 1) y en ese contexto se lo conoce como la segunda ley de Kepler del movimiento planetario.

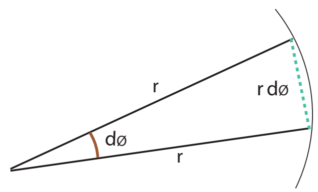


***Figura 2.12.*** *Variación infinitesimal del vector $\vec{r}$ debida solamente a una variación infinitesimal en el ángulo Ø.*

## 2.5.5 Trayectoria

La descripción del movimiento de un cuerpo en un campo central se puede obtener directamente de las leyes de conservación. Como ya hemos señalado, la conservación del impulso angular permite dos simplificaciones importantes del problema: primero, conduce a reducir el número de coordenadas necesarias a solamente dos; segundo, escribiendo la velocidad angular $d\phi/dt$ en términos de la distancia al centro, conduce a la analogía formal de la energía con la de un movimiento unidimensional con un potencial efectivo. Este punto es clave, ya que de la expresión para la energía E (ecuación 2.46) puede despejarse la velocidad radial:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M^2}{m^2r^2}} \tag{2.53}$$

y de aquí se obtiene de inmediato la relación entre una variación infinitesimal de la distancia al centro y el tiempo:

$$dt = dr\frac{\sqrt{\frac{m}{2}}}{\sqrt{E - U(r) - M^2/2mr^2}} \tag{2.54}$$

Para obtener la distancia r(t) para todo tiempo es necesario conocer la forma de la energía potencial U(r), e integrar miembro a miembro la ecuación anterior. En general, tal como se demostró más arriba, el movimiento tendrá lugar en la región del plano tal que $E \geq U(r) + M^2/2mr^2$. Si esta condición se cumple para distancias cualesquiera mayores que un cierto valor, el movimiento será ilimitado (ya que esperando suficiente tiempo el cuerpo alcanzará cualquier distancia al centro). En cambio, si dicha condición se cumple para un rango finito de valores de r, esto es para $r_1 \leq r \leq r_2$, entonces el movimiento es limitado (o acotado), y la trayectoria estará contenida en una corona circular de radios $r_1$ y $r_2$.

La relación entre el ángulo $\phi$ y el tiempo puede obtenerse, si ya se obtuvo la distancia al centro en función del tiempo, reemplazando la forma explícita de r(t) en la expresión del impulso angular $M = mr^2 d\phi/dt$, e integrando la ecuación resultante:

$$d\phi = \frac{M}{m}\frac{dt}{r^2(t)} \tag{2.55}$$

Si solamente nos interesa la trayectoria (es decir, la ecuación de la curva que el cuerpo describe en el espacio), la relación entre el ángulo $\phi$ y la distancia r al centro puede obtenerse reemplazando $dt = mr^2 d\phi/M$ en la expresión que relaciona dt con dr. Un reordenamiento sencillo de lo que resulta conduce a la igualdad:

$$d\phi = \frac{M\,dr}{r^2\sqrt{2m(E - U(r)) - M^2/r^2}} \tag{2.56}$$

que relaciona una variación infinitesimal del ángulo con la variación de la distancia al centro. La integración miembro a miembro de esta ecuación da como resultado el ángulo $\phi$ en función de la distancia r, esto es, la ecuación de la trayectoria $\phi(r)$. Para efectuar dicha integración debe conocerse, claro está, la forma de la energía potencial.