TEMAS DE FÍSICA PARA MATEMÁTICOS
1er. cuatrimestre 2013
2 - PRINCIPIOS VARIACIONALES

Problema 1:
Probar que si $\alpha(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y

$$\int_a^b \alpha(x)h(x)dx = 0$$

para cualquier función $h(x)$ continua en dicho intervalo, entonces $\alpha(x) = 0 \; \forall x \in [a, b]$.

Problema 2:
Sea $F(x, y, z)$ una función con derivadas primeras y segundas continuas para cualquiera de sus argumentos, y sea $y(x)$ cualquier función continuamente diferenciable para $a \leq x \leq b$ que satisface las condiciones de contorno y(a)=A, y(b)=B. Probar entonces que la condición de extremal de la funcional

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$$

conduce a la ecuación de Euler

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0,$$

donde $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$ y $F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'}$.

Problema 3:
Sean dos puntos del plano $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$, con $x_1 \neq x_2$, y una curva definida por $y = f(x)$ que une P_1 y P_2. Probar que la longitud de la curva es mínima si la misma es una recta.

Problema 4:
Encontrar la función $f(x)$ tal que la condición de extremal de la funcional

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2}mv^2 + f(x)\right)\, dt$$

conduzca a:

a) la ley de Galileo de caída de los cuerpos.

b) la ley de movimiento de un cuerpo sometido a una fuerza elástica.

Problema 5: Sea $g(x)$ una función no negativa en el intervalo $[a, b]$.
a) Hallar la curva para la cual la superficie de revolución obtenida al rotar la función alrededor del eje y es mínima. Ayuda: para plantear la integral a minimizar, piense en el área de una "tira" del sólido de revolución que se forma.
b) Si ahora se rota alrededor del eje x, el área de la superficie de revolución obtenida entre los valores a y b viene dada por

$$A[g] = 2\pi \int_a^b g(x) \left(1 + g'(x)^2\right)^{1/2} dx.$$

Hallar $g(x)$ para que el área sea mínima.

Problema 6:
Dada la funcional

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx$$

se quiere encontrar una curva $y(x)$ entre todas las que verifiquen

$$y(a) = A, \qquad y(b) = B,$$

tal que $J[y]$ tenga un extremo, y tal que la funcional $K[y]$ tome cierto valor:

$$K[y] = \int_a^b G(x, y, y')dx = l$$

(se dice entonces que se busca una extremal sujeta al vínculo $K = l$). Demostrar que si $y = y(x)$ *no* es una extremal de $K[y]$, existe una constante λ tal que $y = y(x)$ es solución de la ecuación diferencial

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \lambda \left(G_y - \frac{d}{dx}G_{y'} \right) = 0.$$

Problema 7:
Encontrar la curva que une dos puntos en un campo gravitatorio cerca de la superficie terrestre, a lo largo de la cual una partícula que cae partiendo del reposo llega desde el punto más alto al más bajo en el menor tiempo (problema de la braquistócrona).

Problema 8:
Se tiene una partícula de masa m colgada verticalmente por medio de un resorte de constante elástica k y longitud natural l_0, en un campo gravitatorio constante y uniforme $\mathbf{g}$.
a) Escribir la acción y hallar la ecuación de movimiento de la partícula.

b) Obtener la posición de la partícula como función del tiempo, sabiendo que inicialmente la misma se encuentra en reposo y el resorte está estirado, siendo su longitud $3l_0/2$.

Problema 9:

Dada la acción correspondiente a una masa puntual m:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - \frac{1}{2}k_1x^2 - \frac{1}{2}k_2y^2 \right) dt$$

a) Hallar las ecuaciones de movimiento de la partícula.

b) Encontrar la posición de la partícula en función del tiempo, suponiendo que la misma parte del reposo y que se encuentra inicialmente en (x_0, y_0). Eliminar el tiempo para obtener la ecuación de la trayectoria.

Problema 10:

Demostrar que la acción

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(m\dot{x}\dot{x}^* - \frac{1}{2}R(x^*\dot{x} - x\dot{x}^*) - kxx^* \right) dt,$$

donde las coordenadas x, x^* se toman como independientes, corresponde a un "sistema" de un oscilador amortiguado y un "oscilador imagen" con amortiguamiento negativo.

Problema 11:

Una partícula de masa m y velocidad inicial $\mathbf{v}_1$ pasa de un semiespacio en que su energía potencial es igual a U_1 y entra en otro en el cual su energía potencial es igual a U_2. Determinar el cambio en la dirección del movimiento de la partícula. Mostrar que el resultado contradice la vieja hipótesis corpuscular (de Newton) acerca de la naturaleza de la luz (Sugerencia: ver la ley de refracción en algún libro de óptica[1], y recordar que la velocidad de la luz es menor en, por ejemplo, el agua que en el aire).

Problema 12:

Encontrar la ley de transformación de la lagrangiana y la acción cuando se pasa de un sistema de referencia inercial K a otro sistema inercial K' que se mueve con velocidad $\mathbf{V}$ respecto del primero. Expresar el resultado en términos de la masa total, de la posición del centro de masa respecto del sistema K', y del impulso respecto del mismo sistema.

[1] Por ejemplo, el de Hecht y Zajac, o el de Jenkins y White.