1 Mecánica

1.1 De Galileo al principio de mínima acción

1.1.1 Ley de inercia

Comenzaremos por mostrar que cuando se busca algún principio matemático del cual se puedan deducir las leyes más básicas de la mecánica surge de manera natural la idea de minimizar una funcional para obtener las ecuaciones de movimiento de un sistema.

Consideremos el movimiento de un cuerpo puntual libre de fuerzas que en el instante t_1 se encuentra en la posición x_1 y en el instante t_2 se encuentra en la posición x_2 . Su velocidad media en el intervalo $t_2 - t_1$ es

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \quad (1)$$

Esto no nos dice nada, por cierto, acerca del comportamiento del cuerpo entre los instantes t_1 y t_2 : en principio, cualquier curva $v(t)$ tal que el área bajo $v(t)$ entre t_1 y t_2 sea igual al desplazamiento $x_2 - x_1$ sería admisible.

Sin embargo, desde Galileo sabemos que para un cuerpo libre de fuerzas la naturaleza elige siempre la curva

$$V(t) = \bar{v} = \text{constante}. \quad (2)$$

La curva correspondiente a la posición en función del tiempo es, claro está, una recta de pendiente igual a $\bar{v}$. Supongamos que se quiere encontrar algún principio del cual se deduzca que, entre todas las curvas $v(t)$ tales que el área entre t_1 y t_2 es igual al desplazamiento $x_2 - x_1$, la curva que representa el movimiento real del cuerpo libre es $V(t) = \bar{v} = \text{constante}$. Para esto necesitamos hallar un criterio para diferenciar entre todas estas curvas, y la clave nos la da el hecho de que funciones que no difieren en sus valores medios sí difieren en los valores medios de sus cuadrados.

Consideremos una curva $v(t)$ cualquiera tal que el área entre t_1 y t_2 sea igual a $x_2 - x_1$, es decir,

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (3)$$

Toda función $v(t)$ que verifique esta igualdad puede escribirse como

$$v(t) = \bar{v} + \delta v(t), \quad (4)$$

donde la variación $\delta v(t)$ es tal que

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \delta v(t) dt. \quad (5)$$

Calculemos el valor medio del cuadrado de la velocidad:

$$\overline{v^2} = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} v^2 dt = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \left[\int_{t_1}^{t_2} \bar{v}^2 dt + 2 \int_{t_1}^{t_2} \bar{v} \delta v dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta v^2 dt \right]. \quad (6)$$

Como $\bar{v}$ es una constante y δv verifica la (2.4), esta expresión se reduce a

$$\overline{v^2} = \bar{v}^2 + \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} \delta v^2 dt. \quad (7)$$

Dado que δv^2 es mayor o igual que cero, su integral entre t_1 y t_2 es positiva salvo cuando $\delta v = 0$; en este caso particular la integral se anula y en la expresión anterior sólo subsiste el primer término de la suma. La curva de Galileo $V(t) = \bar{v}$, para la cual es $\delta v = 0$, tiene entonces una propiedad notable: el valor medio del cuadrado de la velocidad toma *el menor valor posible* compatible con que el cuerpo se encuentre en x_1 en el instante t_1 y en x_2 en el instante t_2 .

Observemos que como $t_2 - t_1$ es un intervalo dado, al movimiento real –uniforme– del cuerpo libre corresponde el valor mínimo de la integral

$$\int_{t_1}^{t_2} v^2 dt. \quad (8)$$

Hemos obtenido así el principio que buscábamos: el movimiento del cuerpo libre es tal que la integral (8) toma el mínimo valor posible compatible con las condiciones $x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$. Notemos que la integral (8) no asigna números a diferentes valores de cierta variable, sino que asigna números a diferentes *funciones*; esto resulta evidente si se piensa que, en particular, el valor mínimo de la integral (8) corresponde, no a determinado valor de una variable, sino a *cierta curva*. Se dice que la (8) es una *funcional*.

Verifiquemos que, efectivamente, el principio encontrado conduce a la ley de inercia de Galileo. Si la integral (8) alcanza un mínimo, su variación a primer orden debe anularse:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} v^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial v^2}{\partial v} \delta v dt = 0. \quad (9)$$

Como las curvas $v(t)$ admisibles son las compatibles con las condiciones $x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$, expresaremos la variación δv en términos de la variación δx , que mide

cuánto difiere una curva $x(t)$ de la curva real asociada con el movimiento uniforme; escribiendo $\delta v = \frac{d}{dt}(\delta x)$ obtenemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial v^2}{\partial v} \frac{d}{dt}(\delta x) dt = 0. \quad (10)$$

Integrando por partes se tiene

$$0 = \left[\frac{\partial v^2}{\partial v} \delta x \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v^2}{\partial v} \right) \delta x dt, \quad (11)$$

y como los valores de x en los extremos están fijos, es $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$, de donde

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v^2}{\partial v} \right) \delta x dt. \quad (12)$$

Como $\delta x(t)$ puede ser *cualquier* función que se anule en los extremos, para que se verifique la ecuación (12) debe ser

$$\frac{d}{dt} (2v) = 0, \quad (13)$$

es decir,

$$v = \text{constante}, \quad (14)$$

de acuerdo con la ley de inercia.

1.1.2 Ley de caída de los cuerpos y la funcional acción

Pasemos ahora al caso de un cuerpo en interacción con otros. Para esto, comencemos por el *principio de relatividad de Galileo*: en todos los sistemas de referencia inerciales las leyes del movimiento de los cuerpos son las mismas. Como en la mecánica clásica el tiempo tiene un carácter absoluto, del principio de relatividad se desprende que si un cuerpo B ejerce una fuerza sobre un cuerpo A , un cambio en la posición de B debe modificar de manera *instantánea* dicha fuerza. El hecho de que un cambio en la posición de un cuerpo deba producir *instantáneamente* un cambio en la fuerza que ejerce sobre otro, esto es, que la fuerza en cierto instante depende de las posiciones en ese mismo instante, permite describir la interacción entre dos cuerpos mediante una función que depende solamente de sus coordenadas. Para un cuerpo en interacción con otros que realizan un movimiento dado, cabe entonces buscar la funcional cuyo valor mínimo corresponde a su ley de movimiento en la forma de una integral que contenga, además del cuadrado de la velocidad, alguna función de su posición y del tiempo.

Consideremos el ejemplo sencillo de un cuerpo que cae hacia la Tierra desde una altura pequeña comparada con el radio terrestre. La ley de movimiento del cuerpo está dada, como sabemos desde los *Diálogos* de Galileo, por una proporcionalidad directa de la velocidad con el tiempo; si se elige el sentido positivo del eje x hacia arriba tenemos

$$v = -gt. \quad (15)$$

Durante la caída de un cuerpo de masa pequeña la Tierra permanece prácticamente en reposo. Para describir el movimiento del cuerpo en interacción con la Tierra propondremos entonces una funcional de la forma

$$\int_{t_1}^{t_2} (v^2 + f(x)) dt, \quad (16)$$

es decir, cuyo integrando contenga, además del cuadrado de la velocidad, una función sólo de la posición del cuerpo (las demás coordenadas y, z , son, evidentemente, irrelevantes), y encontraremos la forma de $f(x)$ pidiendo que la condición de mínimo de la funcional conduzca a la ley (15).

Efectuando la variación e igualándola a cero, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int_{t_1}^{t_2} (v^2 + f(x)) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial v^2}{\partial v} \delta v + \frac{\partial f}{\partial x} \delta x \right] dt \\ &= \left[\frac{\partial v^2}{\partial v} \delta x \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v^2}{\partial v} \right) - \frac{\partial f}{\partial x} \right] \delta x dt, \end{aligned}$$

y como el primer término se anula por ser $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$, de forma análoga a la de más arriba se tiene

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v^2}{\partial v} \right) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (17)$$

de donde

$$2 \frac{dv}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (18)$$

Dado que buscamos la función $f(x)$ que, al ser introducida en la funcional, conduzca a $v = -gt$, reemplazamos v por $-gt$ en la ecuación (18) y luego de una integración elemental obtenemos

$$f(x) = -2gx \quad (19)$$

(a menos de una constante aditiva). Vemos así que la función que debemos introducir en el integrando es $-2gx$. La funcional tal que al igualar a cero su variación a primer

orden conduce a la ley de caída de los cuerpos es entonces

$$\int_{t_1}^{t_2} (v^2 - 2gx) dt. \quad (20)$$

Si multiplicamos la funcional por una constante definida positiva el mínimo de la funcional no cambia, y las ecuaciones de movimiento resultantes son las mismas. Para obtener en el integrando cantidades conocidas, multiplicamos entonces por $m/2$ donde m es la masa de la partícula. Obtenemos así la funcional *acción*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt, \quad (21)$$

donde $T = \frac{1}{2}mv^2$ es la energía cinética, y $U = mgx$ es la energía potencial asociada a la interacción gravitatoria entre el cuerpo y la Tierra.

Para cualquier interacción a la que se asocie una energía potencial U las leyes del movimiento de un cuerpo pueden obtenerse de la condición de mínimo de una integral de la forma (21).

1.1.3 Principio de mínima acción

En forma general, la acción S puede definirse para un número cualquiera de grados de libertad -y por lo tanto para un número cualquiera de cuerpos. Para un sistema de N cuerpos que solamente interactúan entre ellos (sistema *cerrado*), cuyo estado se describe mediante las coordenadas $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ y las velocidades $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N$, la funcional acción se escribe como

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 - U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \right) dt, \quad (22)$$

donde $U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ es la energía potencial asociada a la interacción entre los cuerpos del sistema, y la condición $\delta S = 0$ conduce a N ecuaciones vectoriales de la forma

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \quad (23)$$

(es decir, como $\mathbf{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}$ es la fuerza que actúa sobre el cuerpo i -ésimo, se obtienen las ecuaciones de Newton para cada cuerpo) cuya solución da la evolución del sistema. Como las ecuaciones de movimiento pueden siempre obtenerse pidiendo que la variación de S a primer orden sea nula, la formulación más general de las leyes de la mecánica es:

Para cada sistema mecánico puede definirse una funcional, la acción S , tal que para el movimiento real del sistema se cumple que $\delta S = 0$.

Este es el llamado *Principio de Mínima Acción*.

En forma más general el principio de mínima acción puede escribirse introduciendo la lagrangiana L del sistema y definiendo la acción como su integral entre t_1 y t_2 (véase más abajo).

Observemos que si los cuerpos del sistema no interactúan solamente entre ellos, sino que están sometidos además a un campo externo generado por otros cuerpos (se dice entonces que el sistema es *abierto*), la evolución del sistema no queda totalmente determinada por las coordenadas de los cuerpos que lo constituyen: en efecto, la fuerza sobre cada cuerpo depende ahora también del estado del campo. En este caso la funcional acción no puede definirse para el sistema abierto, sino que debe definirse para un sistema mayor que incluye a los cuerpos que son fuente del campo.

Sin embargo, si el campo externo varía de una forma dada (es decir que es una función dada del tiempo), puede de todas maneras definirse una función energía potencial para el sistema, tal que al introducirla en la acción la condición $\delta S = 0$ conduzca a las ecuaciones de movimiento. La diferencia con el caso de un sistema cerrado es que la energía potencial será una función de las coordenadas y del tiempo, es decir, $U = U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$.

1.1.4 Energía mecánica

Volvamos al ejemplo de la caída de un cuerpo hacia la Tierra; a partir de las ecuaciones de la sección anterior es fácil comprobar que la cantidad $\frac{1}{2}mv^2 + mgx = T + U$ permanece constante. Esto permite, si se conoce el valor de $T + U$, calcular, por ejemplo, la velocidad del cuerpo como función de su altura. Es claro entonces que saber que cierta magnitud permanece constante durante la evolución de un sistema es muy útil; sin embargo, lo que realmente nos interesa es encontrar constantes de movimiento a partir de consideraciones generales, de forma tal que *sin resolver las ecuaciones de movimiento* sea posible obtener información importante acerca de la evolución de un sistema.

El tiempo es homogéneo, y por lo tanto, dadas las mismas condiciones iniciales un sistema cerrado -o uno abierto pero sometido a un campo constante- debe evolucionar de la misma manera independientemente del instante en que se dan dichas condiciones. De acuerdo con las ecuaciones (23) esto es posible solamente si la energía potencial no depende explícitamente del tiempo, es decir si $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$.

Observemos que a partir de

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \quad (24)$$

un cálculo sencillo conduce a

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left(U + \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right). \quad (25)$$

Por lo tanto, para un sistema cerrado o sometido a un campo exterior constante, como es $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$, la cantidad

$$E \equiv \left(U + \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \quad (26)$$

que llamamos *energía mecánica* del sistema no cambia con el tiempo. Si el campo externo depende del tiempo es $\frac{\partial U}{\partial t} \neq 0$ y la energía E del sistema no se conserva.

1.1.5 Cantidad de movimiento

El espacio es homogéneo, y por lo tanto la evolución de un sistema cerrado debe ser independiente de que se traslade al sistema como un todo de una región del espacio a otra. En otras palabras, la evolución de los cuerpos de un sistema cerrado sólo puede depender de sus posiciones relativas. Esto solamente se verifica si la energía potencial depende de las diferencias entre sus coordenadas.

Consideremos, por simplicidad, el caso de un sistema formado por sólo dos cuerpos. Como el espacio es, además de homogéneo, isótropo, la energía potencial del sistema que forman no puede depender de su orientación sino solamente de su distancia mutua; por lo tanto

$$U = U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|). \quad (27)$$

Esta forma de la dependencia con las coordenadas tiene una consecuencia importante: como es fácil comprobar, se cumple que

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_2} = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_1}, \quad (28)$$

es decir que

$$m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = -m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \quad (29)$$

(como el sistema es cerrado $m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$ y viceversa, y tenemos así la ley de acción y reacción), de donde

$$\frac{d}{dt} (m_2 \mathbf{v}_2 + m_1 \mathbf{v}_1) = 0. \quad (30)$$

Esto significa que la cantidad

$$\mathbf{P} \equiv m_2 \mathbf{v}_2 + m_1 \mathbf{v}_1 \quad (31)$$

que llamamos *momento* o *cantidad de movimiento* del sistema formado por ambos cuerpos se mantiene constante. En general, para un sistema cerrado de N cuerpos de la homogeneidad del espacio se deduce la conservación de

$$\mathbf{P} = \sum m_i \mathbf{v}_i. \quad (32)$$

1.1.6 Impulso angular

Además de homogéneo el espacio es isótropo, es decir, todas las direcciones son equivalentes. De esto se desprende que las propiedades mecánicas de un sistema aislado no deben cambiar si el sistema en conjunto experimenta una rotación cualquiera en el espacio. Dicha condición lleva la ley de conservación del *impulso angular*,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0, \quad \mathbf{L} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i, \quad (33)$$

(donde $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$) para un sistema aislado.

2 Electrodinámica

2.1 Sistemas con infinitos grados de libertad

De aquí en adelante emplearemos la notación usual en relatividad, en la que los índices $i = 0, 1, 2, 3$ designan las componentes temporal y espaciales (en ese orden) de un *cuadrivector* (por ejemplo, las coordenadas espacio-temporales de un evento, $x^i = (ct, x, y, z)$, donde c es la velocidad de la luz). Dichos índices se colocan arriba o abajo según se consideren las componentes contravariantes (las físicas) o las covariantes; las componentes covariantes espaciales difieren de las contravariantes en un signo, mientras que la componente temporal es la misma en ambos casos. Toda vez que un producto contenga ambas componentes, sobreentenderemos la convención de Einstein, según la cual se suma sobre los índices repetidos (por ejemplo, el cuadrado del intervalo se escribe $ds^2 = dx_i dx^i = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$).

Consideremos un sistema descrito por ciertas magnitudes q (omitiremos el índice que las designa) que son a su vez funciones del tiempo y de las coordenadas espaciales, es decir, $q = q(x^j)$. Su funcional acción puede escribirse en la forma de una integral

sobre el cilindro espacio-temporal Ω que se obtiene como el producto cartesiano de cierta región espacial R y el intervalo temporal $[t_a, t_b]$:

$$\begin{aligned} S[q] &= \int_{\Omega} \Lambda \left(q, \frac{\partial q}{\partial x^i} \right) d\Omega \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \int_R \Lambda \left(q, \frac{\partial q}{\partial x^i} \right) dV dt \end{aligned} \quad (34)$$

donde Λ es una cierta función de las magnitudes q y de sus primeras derivadas respecto del tiempo y de las coordenadas espaciales (como veremos, para el campo electromagnético las magnitudes q son las componentes del cuadripotencial $A^i = (\phi, \mathbf{A})$). Como la integral de Λ sobre el volumen espacial aparece a su vez integrada en el tiempo, entonces Λ es la *densidad lagrangiana* y

$$L = \int_R \Lambda \left(q, \frac{\partial q}{\partial x^i} \right) dV$$

es la lagrangiana del sistema. Observemos que Λ no depende explícitamente del tiempo ni de las coordenadas espaciales, de manera que la funcional acción considerada corresponde a un sistema aislado. La acción es así invariante ante traslaciones espaciales o temporales, y ante rotaciones, de donde se desprende la conservación del impulso, la energía y el impulso angular.

Si variamos S obtendremos las ecuaciones de movimiento del sistema, esto es, las ecuaciones del campo descrito por las q . Si, para abreviar, escribimos $\partial q / \partial x^i = q_{,i}$ (notemos que la derivada respecto de una componente contravariante da una componente covariante), tenemos

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_a}^{t_b} \int_R \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} \delta q_{,i} \right) dV dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \int_R \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \delta q + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} \delta q \right) - \delta q \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} \right) \right] dV dt. \end{aligned} \quad (35)$$

Si extendemos la región R a todo el espacio y usamos el el teorema de Gauss para transformar la integral del segundo término en una integral de superficie, su contribución se anula si suponemos que los campos se anulan en el infinito. De la condición $\delta S = 0$ se obtiene entonces

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial q} = 0 \quad (36)$$

que son las ecuaciones de Euler (o de Lagrange) del campo descrito por las cantidades q . Notemos que no contienen derivadas de la lagrangiana sino de la densidad lagrangiana.

2.2 Ecuaciones del campo electromagnético

2.2.1 Acción de una carga en un campo electromagnético

La acción de una carga puntual que se mueve en un campo electromagnético dado es la suma de dos partes: la acción de una partícula libre y un término correspondiente a la interacción de la partícula con el campo. Si las ecuaciones de movimiento deben verificar el principio de relatividad, la acción de una partícula libre no puede depender del sistema de referencia, de manera que debe ser invariante ante las transformaciones de Lorentz. Puede mostrarse que entonces la acción debe ser proporcional al intervalo ds :

$$S_m = -mc \int_a^b ds, \quad (37)$$

donde m es la masa de la partícula y c es la velocidad de la luz. Dado que $ds = \sqrt{c^2 dt^2 - |d\mathbf{r}|^2}$, entonces la lagrangiana es

$$L_m = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (38)$$

La interacción de la partícula con el campo está determinada por su carga e , que puede ser positiva, negativa, o nula. El campo está caracterizado por el *cuadrivector potencial* $A^i = (\phi, \mathbf{A})$, cuyas componentes son funciones, en general, de las coordenadas y del tiempo. Puesto que la acción asociado a la interacción de la carga con el campo debe conducir a ecuaciones que verifiquen el principio de relatividad, entonces dicha acción debe ser un escalar; la forma más sencilla de obtener un escalar a partir del cuadripotencial es contrayéndolo con otro cuadrivector, de manera que la acción propuesta para la interacción es

$$S_{int} = -\frac{e}{c} \int_a^b A_i dx^i \quad (39)$$

donde el potencial se evalúa a lo largo de trayectoria de la partícula en el espacio tiempo (su *línea de universo*).

2.2.2 Ecuaciones de movimiento de una carga

Si escribimos explícitamente la lagrangiana de la partícula libre y hacemos lo mismo con la acción de la interacción, la acción de una carga puntual en un campo electromagnético externo resulta

$$S = S_m + S_{int} = \int_a^b \left(-mc ds - \frac{e}{c} A_i dx^i \right)$$

$$= \int_a^b \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi \right) dt \quad (40)$$

donde $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = d\mathbf{r}/dt$. Así, las ecuaciones de movimiento de la carga en el campo estarán dadas por las ecuaciones de Euler–Lagrange con la lagrangiana

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi. \quad (41)$$

Como

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \quad (42)$$

donde $\mathbf{p}$ es el impulso lineal de la partícula, y

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{e}{c} \mathbf{grad} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e \mathbf{grad} \phi, \quad (43)$$

usando la fórmula

$$\mathbf{grad} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{rot} \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{rot} \mathbf{b}$$

las ecuaciones de Lagrange resultan:

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) = \frac{e}{c} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{A} - e \mathbf{grad} \phi. \quad (44)$$

Como la derivada total respecto del tiempo puede escribirse siempre $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)$, entonces las ecuaciones se reducen a

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - e \mathbf{grad} \phi + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{A}. \quad (45)$$

La fuerza sobre la carga consta de dos términos esencialmente diferentes: el primero no depende de su velocidad, pero el segundo sí. Esto lleva a las definiciones de los campos eléctrico y magnético

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{grad} \phi \\ \mathbf{B} &= \mathbf{rot} \mathbf{A} \end{aligned} \quad (46)$$

que permite escribir las ecuaciones de movimiento en la forma

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e \mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (47)$$

Observemos que si al cuadripotencial se suma el cuadvivector $\partial f / \partial x^i$ la acción se modifica en una diferencial exacta, por lo cual las ecuaciones de movimiento no se ven afectadas. Así, los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ son invariantes ante una redefinición de la forma

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathbf{grad} f, \quad \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (48)$$

y se dice que el campo electromagnético posee invariancia de contraste o de *gauge*.

2.2.3 El primer par de ecuaciones de Maxwell

Dos de las cuatro ecuaciones de Maxwell para el campo en ausencia de medios materiales se obtienen directamente del hecho de que el rotor de un gradiente es cero, y la divergencia de un rotor también es nula. Así, de las definiciones de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en términos de ϕ y $\mathbf{A}$ se obtiene que

$$\begin{aligned}\mathbf{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \mathbf{div} \mathbf{B} &= 0.\end{aligned}\tag{49}$$

Estas ecuaciones no determinan completamente, claro está, los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$, ya que para eso se necesita conocer la divergencia y el rotor de ambos. La aplicación del teorema de Stokes a la primera ecuación lleva a la definición de fuerza electromotriz en términos de la circulación de $\mathbf{E}$ y la derivada temporal del flujo magnético, mientras que la segunda se interpreta en el sentido de la inexistencia de monopolos magnéticos, y su forma integral, que se obtiene usando el teorema de Gauss, establece que el flujo del campo magnético a través de cualquier superficie cerrada es siempre cero.

2.2.4 El tensor campo electromagnético

Volvamos a escribir la acción de la carga en un campo dado en su forma cuadrivariante. La variación de la acción es entonces

$$\begin{aligned}\delta S &= \delta \int \left(-mcds - \frac{e}{c} A_i dx^i \right) \\ &= - \int \left(mc \frac{dx_i d\delta x^i}{ds} + \frac{e}{c} A_i d\delta x^i + \frac{e}{c} \delta A_i dx^i \right),\end{aligned}\tag{50}$$

donde hemos usado que $ds = \sqrt{dx_i dx^i}$. Escribimos ahora $dx_i/ds = u_i$ donde u_i son las componentes de la *cuadrivelocidad*, e integramos por partes los dos primeros términos de δS . Entonces la condición de extremo $\delta S = 0$ conduce a

$$0 = \int \left(mcd u_i \delta x^i + \frac{e}{c} \delta x^i dA_i - \frac{e}{c} \delta A_i dx^i \right) - \left(mc u_i + \frac{e}{c} A_i \right) \delta x^i.\tag{51}$$

Dado que los extremos de la trayectoria están fijos, el último término se anula. Si escribimos

$$\delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \delta x_k, \quad dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x_k} dx_k,$$

obtenemos entonces

$$0 = \int \left(-mcd u_i \delta x^i - \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \delta x^i dx^k + \frac{\partial A_i}{\partial x_k} dx^i \delta x^k \right).\tag{52}$$

Permutando los índices i, k en el tercer término y reordenando las expresiones resulta

$$0 = \int \left[-mc \frac{du_i}{ds} + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) u_k \right] \delta x^i ds, \quad (53)$$

y como δx^i es una cantidad arbitraria, se obtienen las ecuaciones de Lagrange

$$mc \frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) u_k. \quad (54)$$

La cantidad entre paréntesis es un tensor antisimétrico de segundo rango, y se lo denomina *tensor campo electromagnético*. Se escribe

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}. \quad (55)$$

Observemos que la denominación es natural, ya que el miembro izquierdo es proporcional al *cuadrivector aceleración*, y por lo tanto el miembro derecho debe ser proporcional al campo. La forma explícita de las componentes de F_{ik} en términos de los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ se obtiene reemplazando en su definición $A_i = (\phi, -\mathbf{A})$:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (56)$$

Es sencillo mostrar que a partir del tensor de campo pueden construirse dos invariantes, es decir dos cantidades que no dependen del sistema de referencia; ellos son

$$\begin{aligned} F_{ik} F^{ik} &= B^2 - E^2 \\ e^{iklm} F_{ik} F_{lm} &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} \end{aligned} \quad (57)$$

donde e^{iklm} es el cuadritensor unidad completamente antisimétrico de cuarto orden. Como consecuencia de la invariancia de estas cantidades, si los campos son ortogonales en cierto sistema de referencia esa propiedad se mantiene al pasar a otro sistema, y también se mantiene cuál de ellos tiene mayor intensidad.

2.2.5 El segundo par de ecuaciones de Maxwell

Supongamos que tenemos un conjunto de n cargas que realizan ahora un movimiento dado, y nos interesa obtener las restantes ecuaciones de los campos. Debemos para esto escribir la acción para las cargas como la suma de n términos como los de la sección anterior, más un término correspondiente al campo solo, esto es, un término

S_C que depende solamente de las propiedades del campo, y variar la acción completa dejando fijas las trayectorias de las cargas.

Es claro que el término S_C debe construirse a partir de un integrando que sea un invariante. Como vimos, a partir del tensor campo electromagnético pueden obtenerse dos invariantes. Pero uno de ellos, el que contiene al tensor unidad e^{iklm} no es un escalar sino un pseudoescalar. Más aún, puede probarse que es una cuadridivergencia, de manera que su integral contribuiría a la acción con un término que no se reflejaría en las ecuaciones de movimiento del campo. Por cualquiera de las dos razones debemos entonces descartarlo, y escribiremos la acción del campo “solo” como una integral sobre un volumen del espacio-tiempo del escalar $F_{ik}F^{ik} = B^2 - E^2$. Así, la acción completa del sistema de n cargas y el campo se escribe

$$S = - \sum \left(\int mcds + \int \frac{e}{c} A_i dx^i \right) - \frac{1}{16\pi} \int F_{ik} F^{ik} dV dt. \quad (58)$$

La suma se extiende a todas las cargas. Aquí, a diferencia de lo que hicimos antes, no es necesario suponer que las cargas no modifican al campo; todo lo contrario, el cuadridipotencial y el tensor campo electromagnético corresponden a los campos de las cargas más los campos externos que puedan existir.

Introduzcamos el *cuadrivector corriente*. Para esto pasemos de una suma sobre cargas puntuales a una integral sobre el volumen de una densidad de carga ρ , de manera que el segundo término de la acción se transforma

$$- \sum \int \frac{e}{c} A_i dx^i \rightarrow - \frac{1}{c} \int \rho A_i dx^i dV = - \frac{1}{c} \int \rho A_i \frac{dx^i}{dt} dV dt$$

y definamos la corriente como $j^i = \rho \frac{dx^i}{dt}$; la componente temporal de este cuadrivector es c por la densidad de carga, y las tres componentes espaciales son las del vector densidad de corriente ordinario $\mathbf{j}$. De esta manera la acción se escribe

$$S = - \sum \int mcds - \int \frac{1}{c} A_i j^i dV dt - \frac{1}{16\pi} \int F_{ik} F^{ik} dV dt. \quad (59)$$

Para determinar ahora las ecuaciones de los campos debemos igualar a cero la variación a primer orden de esta acción dejando fijas las trayectorias de las cargas y variando el cuadridipotencial A_i . El primer término de S entonces no contribuye al efectuar la variación, y el principio variacional se reduce a

$$0 = \delta S = - \int \left(\frac{1}{c} j^i \delta A_i + \frac{1}{8\pi} F^{ik} \delta F_{ik} \right) dV dt \quad (60)$$

(aparece $1/(8\pi)$ en lugar de $1/(16\pi)$ porque $F^{ik}\delta F_{ik} = F_{ik}\delta F^{ik}$). Reemplacemos ahora el tensor de campo por su expresión en términos de derivadas del cuadripotencial:

$$\delta S = - \int \left(\frac{1}{c} j^i \delta A_i + \frac{1}{8\pi} F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^i} \delta A_k - \frac{1}{8\pi} F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_i \right) dV dt. \quad (61)$$

Si ahora permutamos los índices i, k sobre los que se suma, y usamos que el tensor de campo es antisimétrico, obtenemos

$$\delta S = - \int \left(\frac{1}{c} j^i \delta A_i - \frac{1}{4\pi} F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_i \right) dV dt. \quad (62)$$

Integremos por partes el segundo término:

$$\delta S = - \int \left(\frac{1}{c} j^i + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} \right) \delta A_i dV dt - \frac{1}{4\pi} \int F^{ik} \delta A_i dS_k, \quad (63)$$

donde dS_k es un elemento diferencial de la superficie que encierra al cuadvolumen sobre el cual se integra. Al extender el volumen espacial a infinito los campos sobre la superficie se anulan; en los límites temporales, por otro lado, el cuadripotencial está fijo, esto es, $\delta A_i = 0$, y por lo tanto la integral sobre la superficie se cancela, y la condición $\delta S = 0$ se traduce en

$$\int \left(\frac{1}{c} j^i + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} \right) \delta A_i dV dt = 0, \quad (64)$$

y dada la arbitrariedad de la variación δA_i , se obtiene

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i \quad (65)$$

que son las dos ecuaciones de Maxwell restantes escritas en forma cuadridimensional. Escribiendo explícitamente las componentes del tensor campo electromagnético obtendremos la forma usual (tridimensional) de dichas ecuaciones. Por ejemplo, para $i = 1$ tenemos $F^{1k} = (-E_x, 0, -B_z, B_y)$ y $j^1 = j_x$, de manera que se obtiene

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_x, \quad (66)$$

y procediendo de manera análoga con $i = 2$ e $i = 3$ resulta

$$\mathbf{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (67)$$

Para $i = 0$ tenemos $F^{0k} = (0, E_x, E_y, E_z)$ y $j^0 = c\rho$, de manera que resulta

$$\mathbf{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho. \quad (68)$$

Estas son las dos ecuaciones de Maxwell que faltaban. Junto con las anteriores determinan por completo el campo electromagnético en ausencia de medios materiales. La aplicación del teorema de Stokes a la primera lleva a la ley de Ampère que relaciona la circulación del campo magnético con la corriente y la variación del campo eléctrico (*corriente de desplazamiento*), y la aplicación del teorema de Gauss a la segunda conduce a la relación entre el flujo del campo eléctrico a través de cierta superficie y la carga total encerrada por dicha superficie.

Notemos que de las ecuaciones escritas en forma cuatridimensional se deduce inmediatamente la ecuación de continuidad, esto es, la relación local que existe entre la densidad de carga y la densidad de corriente: en efecto, derivando obtenemos

$$\frac{\partial^2 F^{ik}}{\partial x^i \partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} \frac{\partial j^i}{\partial x^i} \quad (69)$$

y como el tensor de campo es antisimétrico pero la derivación respecto de x^i y x^k es simétrica entonces esta expresión debe anularse, y por lo tanto

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{div} \mathbf{j} = 0 \quad (70)$$

que es la ecuación de continuidad.

2.2.6 Tensor energía-impulso y leyes de conservación

Volvamos a las ecuaciones de movimiento de la sección 3.5., que incluyeron en su deducción la hipótesis de que la densidad lagrangiana no dependía explícitamente de las coordenadas espacio-temporales. Escribamos

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \frac{\partial \Lambda}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x^i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \frac{\partial q_{,k}}{\partial x^i} \quad (71)$$

de manera que

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \right) q_{,i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \frac{\partial q_{,i}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(q_{,i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \right). \quad (72)$$

Si reescribimos

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \delta_i^k \frac{\partial \Lambda}{\partial x^k}$$

e introducimos la notación

$$T_i^k = -\delta_i^k \Lambda + q_{,i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \quad (73)$$

(o en el caso más general de varias cantidades q , $T_i^k = -\delta_i^k \Lambda + \sum q_{,i}^{(l)} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}^{(l)}}$), entonces de las ecuaciones de movimiento se desprende que

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0. \quad (74)$$

Si escribimos explícitamente Λ en términos del tensor de campo como $\Lambda = -\frac{1}{16\pi} F_{ik} F^{ik}$, entonces obtenemos que

$$T^{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(-F^{il} F_l^k + \frac{1}{4} \eta^{ik} F_{lm} F^{lm} \right). \quad (75)$$

Análogamente a lo que ocurre con un cuádrivector, la anulación de la cuádrivergenencia del cuádrítensor T_i^k significa que se conserva el vector P_i cuyas componentes son las integrales de T_i^k extendidas sobre una hipersuperficie que contiene todo el espacio de tres dimensiones:

$$P^i = \alpha \int T^{ik} dS_k = \text{constante}. \quad (76)$$

Supongamos que la superficie de integración es un hiperplano de tiempo fijo. Entonces, la cantidad P^0 (por ejemplo) es igual a

$$P^0 = \alpha \int T^{0k} dS_k = \alpha \int T^{00} dV \quad (77)$$

y dado que

$$T^{00} = -\Lambda + \sum q_{,0}^{(l)} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,0}^{(l)}} \quad (78)$$

que coincide con la densidad hamiltoniana (ver más arriba), entonces la constante α debe elegirse como $1/c$ para que la constancia de P^0 corresponda a la conservación de la energía. En general, las fórmulas para cualquier i corresponden a la conservación de las componentes del cuádrivector impulso del sistema. De manera similar se procede con el cuádrítensor impulso angular.

Referencias

1. Gelfand I. M. y Fomin S. V., *Calculus of Variations*, Prentice–Hall, New Jersey (1963).
2. Krasnov M. L., Makarenko G. I. y Kiseliov A. I., *Cálculo Variacional (ejemplos y problemas)*, Mir, Moscú (1976).
3. Lanczos C., *The Variational Principles of Mechanics*, Dover, New York (1986).
4. Landau L. D. y Lifshitz E. M., *Mecánica*, Reverté, Barcelona (1978).
5. Landau L. D. y Lifshitz E. M., *Teoría Clásica de los Campos*, Reverté, Barcelona (1987).
6. Morse P. M. y Feshback H., *Methods of Theoretical Physics*, McGraw–Hill, New York (1953).