TEMAS DE FÍSICA PARA MATEMÁTICOS
1er. cuatrimestre 2013
2 - PRINCIPIOS VARIACIONALES

Problema 1:

Probar que si $\alpha(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y

$$\int_a^b \alpha(x)h(x)dx = 0$$

para cualquier función $h(x)$ continua en dicho intervalo, entonces $\alpha(x) = 0 \; \forall x \in [a, b]$.

Problema 2:

Sean dos puntos del plano $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$, con $x_1 \neq x_2$, y una curva definida por $y = f(x)$ que une P_1 y P_2. Probar que la longitud de la curva es mínima si la misma es una recta.

Problema 3:

Encontrar la función $f(x)$ tal que la condición de extremal de la funcional

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2}mv^2 + f(x)\right) \, dt$$

conduzca a:

$a)$ la ley de Galileo de caída de los cuerpos.

$b)$ la ley de movimiento de un cuerpo sometido a una fuerza elástica.

Problema 4:

Sea $F(x, y, z)$ una función con derivadas primeras y segundas continuas para cualquiera de sus argumentos, y sea $y(x)$ cualquier función continuamente diferenciable para $a \leq x \leq b$ que satisface las condiciones de contorno y(a)=A, y(b)=B. Probar entonces que la condición de extremal de la funcional

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$$

conduce a la ecuación de Euler

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0,$$

donde $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$ y $F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'}$.

Problema 5:

Sea $g(x)$ una función no negativa en el intervalo $[a, b]$. El área de la superficie de revolución obtenida rotando la función $g(x)$ alrededor del eje x entre los valores a y b viene dada por

$$A[g] = 2\pi \int_a^b g(x) \left(1 + g'(x)^2\right)^{1/2} dx.$$

Hallar $g(x)$ para que el área sea mínima.

Problema 6:

Encontrar la curva que une dos puntos en un campo gravitatorio cerca de la superficie terrestre, a lo largo de la cual una partícula que cae partiendo del reposo llega desde el punto más alto al más bajo en el menor tiempo (problema de la braquistócrona).

Problema 7:

Dada la funcional

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx$$

se quiere encontrar una curva $y(x)$ entre todas las que verifiquen

$$y(a) = A, \qquad y(b) = B,$$

tal que $J[y]$ tenga un extremo, y tal que la funcional $K[y]$ tome cierto valor:

$$K[y] = \int_a^b G(x, y, y')dx = l$$

(se dice entonces que se busca una extremal sujeta al vínculo $K = l$). Demostrar que si $y = y(x)$ *no* es una extremal de $K[y]$, existe una constante λ tal que $y = y(x)$ es solución de la ecuación diferencial

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \lambda\left(G_y - \frac{d}{dx}G_{y'}\right) = 0.$$

Problema 8:

Se tiene una partícula de masa m colgada verticalmente por medio de un resorte de constante elástica k y longitud natural l_0, en un campo gravitatorio constante y uniforme $\mathbf{g}$.

a) Escribir la acción y hallar la ecuación de movimiento de la partícula.

b) Obtener la posición de la partícula como función del tiempo, sabiendo que inicialmente la misma se encuentra en reposo y el resorte está estirado, siendo su longitud $3l_0/2$.

Problema 9:

Dada la acción correspondiente a una masa puntual m:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - \frac{1}{2}k_1 x^2 - \frac{1}{2}k_2 y^2 \right) dt$$

a) Hallar las ecuaciones de movimiento de la partícula.

b) Encontrar la posición de la partícula en función del tiempo, suponiendo que la misma parte del reposo y que se encuentra inicialmente en (x_0, y_0). Eliminar el tiempo para obtener la ecuación de la trayectoria. Graficarla cualitativamente en el caso en que $k_2 = 4k_1$.

Problema 10:

Demostrar que la acción

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(m\dot{x}\dot{x}^* - \frac{1}{2}R(x^*\dot{x} - x\dot{x}^*) - kxx^* \right) dt,$$

donde las coordenadas x, x^* se toman como independientes, corresponde a un "sistema" de un oscilador amortiguado y un "oscilador imagen" con amortiguamiento negativo.

Problema 11:

Una partícula de masa m y velocidad inicial $\mathbf{v}_1$ pasa de un semiespacio en que su energía potencial es igual a U_1 y entra en otro en el cual su energía potencial es igual a U_2. Determinar el cambio en la dirección del movimiento de la partícula. Mostrar que el resultado contradice la vieja hipótesis corpuscular (de Newton) acerca de la naturaleza de la luz (Sugerencia: ver la ley de refracción en algún libro de óptica[1], y recordar que la velocidad de la luz es menor en, por ejemplo, el agua que en el aire).

Problema 12:

Encontrar la ley de transformación de la lagrangiana y la acción cuando se pasa de un sistema de referencia inercial K a otro sistema inercial K' que se mueve con velocidad $\mathbf{V}$ respecto del primero. Expresar el resultado en términos de la masa total, de la posición del centro de masa respecto del sistema K', y del impulso respecto del mismo sistema.

[1]Por ejemplo, el de Hecht y Zajac, o el de Jenkins y White.