TEMAS DE FÍSICA PARA MATEMÁTICOS

1er. cuatrimestre 2013

3 - MECÁNICA

Problema 1:

Indicar, justificando, las componentes del impulso $\mathbf{p}$ y del impulso angular $\mathbf{M}$ que se conservan en el movimiento de una partícula en los siguientes casos:

a) Campo de un plano homogéneo.

b) Campo debido a dos cuerpos puntuales.

c) Campo de un semiplano homogéneo.

d) Campo debido a un cono homogéneo.

Problema 2:

La energía potencial de un cuerpo de masa m que realiza un movimiento unidimensional está dada por una función $U(x)$ que tiene un único mínimo en el punto x_0. El cuerpo tiene una energía inicial E tal que $E = U(x_1) = U(x_2)$, con $x_1 < x_0 < x_2$. Calcular el período del movimiento del cuerpo. Considérese por separado el caso particular en que $U(x) = \alpha(x - x_0)^2$, con $\alpha > 0$.

Problema 3:

Encontrar una expresión para el período de las oscilaciones de un péndulo plano en el campo gravitatorio terrestre, en función de su amplitud descripta por el ángulo máximo ϕ_0. Mostrar explícitamente que para $\phi_0 \ll 1$ el período no depende de la amplitud.

Problema 4:

Escribir la lagrangiana para un péndulo plano cuyo punto de suspensión se desplaza uniformemente, con una frecuencia f, sobre una circunferencia vertical de radio R.

Problema 5:

Considérese una molécula triatómica simétrica y lineal (ABA). Bajo la hipótesis de que la energía potencial depende solamente de las distancias AB y BA (y del ángulo entre los segmentos correspondientes) determinar las frecuencias de las vibraciones longitudinales. Ayuda: utilizar que el centro de masa está fijo, y mostrar que el cambio de variables $q_a = x_1 + x_3,\ q_s = x_1 - x_3$ (donde x_1 y x_3 son las posiciones de los átomos A) permite escribir la lagrangiana como la suma de las lagrangianas de dos osciladores independientes.

Problema 6:
Considérese un sistema formado por una partícula de masa M y n partículas de masa m. Reducir el problema al del movimiento de las n partículas, escribiendo la lagrangiana del sistema en forma análoga a lo hecho en el problema de dos cuerpos.

Problema 7:
Encontrar la trayectoria de una partícula de masa m en un potencial central de la forma $U = \frac{1}{2}kr^2$, con $k > 0$.

Problema 8:
En el caso de una partícula en un campo central, la existencia de un "potencial centrífugo" que diverge cuando $r \to 0$ conduce a que no sea siempre posible alcanzar el centro. Mostrar cuáles son las condiciones sobre el potencial $U(r)$ tales que se pueda alcanzar el centro.

Problema 9:
Escribir en forma paramétrica la relación entre las coordenadas y el tiempo para una partícula de energía $E = 0$ que se mueve en un potencial $U = -\alpha/r$, con $\alpha > 0$.

Problema 10:
Integrar las ecuaciones de movimiento de una partícula en un campo central cuyo potencial es $U = -\alpha/r^2$, con α positivo. Analizar los casos

$$\begin{aligned} E > 0, &\qquad l^2/2m > \alpha \\ E > 0, &\qquad l^2/2m < \alpha \\ E < 0, &\qquad l^2/2m < \alpha \end{aligned}$$

y mostrar que en los dos últimos la partícula alcanza el centro en un tiempo finito; calcular ese tiempo.

Problema 11:
Si se agrega una pequeña corrección δU a la energía potencial $U(r) = -\alpha/r$ la trayectoria de un movimiento ligado deja de ser cerrada y para cada vuelta el perihelio de la órbita se desplaza u ángulo $\delta\phi$. Determinar ese desplazamiento para $\delta U = \beta/r^2$. Sugerencia: reescribir la expresión para $\Delta\phi$ como una derivada, de manera de evitar

integrales divergentes, y desarrollar el integrando en potencias de δU, conservando el término de orden más bajo.

Problema 12:

Así como se demuestra la relación $t'/t = (l'/l)^{1-k/2}$ (donde k es el grado de homogeneidad de la energía potencial) entre los tiempos y las distancias de trayectorias semejantes, encontrar las relaciones análogas para las velocidades, las energías y los impulsos angulares en relación con las distancias.

Problema 13:

Una partícula de masa m_1 y velocidad $\mathbf{v}$ choca elásticamente a una partícula de masa m_2 inicialmente en reposo respecto del sistema laboratorio.
a) Encontrar la relación entre las velocidades de ambas partículas en el sistema del centro de masa y la velocidad $\mathbf{v}$.
b) Encontrar las velocidades posteriores al choque para ambas partículas, en el sistema del laboratorio.

Problema 14:

Una partícula de masa M y velocidad $\mathbf{V}$ respecto del laboratorio, se desintegra en dos partículas de masas m_1 y m_2. Hallar la relación entre los ángulos θ_1 y θ_2, medidos respecto de $\mathbf{V}$ en el sistema del laboratorio, con que sale cada una de las dos partículas.

Problema 15:

Verificar que si se define la *hamiltoniana* $H = \sum p_i \dot{q}_i - L$ la acción puede escribirse como

$$\int \left(\sum p_i \dot{q}_i - H \right) dt$$

y entonces la evolución de un sistema puede obtenerse de las ecuaciones

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Problema 16:

Comprobar que introduciendo los *paréntesis de Poisson*

$$[f, g] \equiv \sum \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right)$$

la ecuación que determina le evolución de una magnitud F es

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial t} + [H, F].$$