TEMAS DE FÍSICA PARA MATEMÁTICOS

1er. cuatrimestre 2013

6 - Ondas y radiación

Problema 1:
Demostrar que la ecuación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

admite soluciones de la forma $f(x,t) = f^-(t - x/c) + f^+(t + x/c)$. Ayuda: es conveniente pasar a las variables u y v definidas por $t = u + v,\ x = c(u - v)$.

Problema 2:
Determinar cuáles de las siguientes expresiones describen ondas viajeras:

$$\begin{aligned}
\psi(y,t) &= e^{-(a^2y^2+b^2t^2-2abty)} \\
\psi(z,t) &= A\, sen(az^2 - bt^2) \\
\psi(x,t) &= A\, sen\left(\frac{x}{a} + \frac{t}{b}\right)^2 \\
\psi(x,t) &= A\, cos^2(t - x)
\end{aligned}$$

Problema 3:
¿Cuántas longitudes de onda de luz amarilla ($\lambda = 580$ nm) caben en una distancia igual al espesor de una hoja de papel (~ 0.1 mm)? ¿Cuántas de microondas de frecuencia $\nu = 10$ GHz?

Problema 4:
A partir de la expresión para el operador laplaciano en coordenadas esféricas, mostrar que las ondas esféricas están descriptas por funciones de la forma

$$\psi(r,t) = \frac{1}{r} f(r - vt).$$

Problema 5:
Los planos de polarización de dos ondas planas monocromáticas

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{10}\, \cos(wt - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \varphi_1), \qquad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{20}\, \cos(wt - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \varphi_2)$$

están inclinados uno respecto del otro un ángulo $\alpha = \pi/2$. Determinar la polarización de la onda resultante.

Problema 6:
Verificar que para una onda plana el flujo de energía por unidad de área y de tiempo es proporcional a la densidad de energía electromagnética y en el sistema gaussiano de unidades se puede escribir en la forma: $\mathbf{S} = cW\hat{\mathbf{n}}$, donde $W = (E^2 + B^2)/8\pi$.

Problema 7:
Considérese una onda electromagnética plana, linealmente polarizada (es decir, con los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en direcciones ortogonales fijas), viajando en la dirección x. Dada una frecuencia de 10 MHz y una amplitud $\mathbf{E}_0 = E_0\,\hat{\mathbf{y}}$,
a) Encontrar el período y la longitud de onda.
b) Escribir una expresión para los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$.
c) Encontrar el flujo de energía de la onda.

Problema 8:
Deducir la ley de reflexión a partir del *Principio de Fermat*, que establece que el tiempo de propagación entre dos puntos dados es un mínimo local.

Problema 9:
Mostrar analíticamente que un haz que entra a una lámina de caras paralelas (de índice de refracción n), emerge de la misma en dirección paralela a la original.

Problema 10:
Calcular el ángulo crítico más allá del cual hay reflexión total interna en una interfase aire-vidrio ($n = 1,5$).

Problema 11:
a) Hallar los potenciales de Lienard y Wiechert para una carga puntual por integración directa a partir de los potenciales retardados para una distribución general de cargas y corrientes. Utilizar la δ de Dirac para escribir, por ejemplo, $\rho(\mathbf{r}', t) = q\,\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_0(t))$.
b) A partir del resultado anterior, obtener los potenciales ϕ y $\mathbf{A}$ a gran distancia de una carga puntual.

Problema 12:
Verificar que para una onda plana, con la elección de *gauge* (medida, calibre, contraste) adecuada los campos eléctrico y magnético se escriben en términos de $\mathbf{A}$ como:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c}(\dot{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{n}}), \quad \mathbf{E} = \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{n}}.$$

Problema 13:
Comprobar que la condición para que se pueda despreciar el tiempo $\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{n}}/c$ en los potenciales retardados (lo cual permite llegar a las expresiones para la radiación dipolar de un sistema) puede escribirse

$$a \ll \lambda,$$

donde a es el orden de las dimensiones del sistema y λ es una longitud de onda característica de la radiación emitida.

Problema 14:
Comprobar que para un sistema aislado de partículas no relativistas con la misma relación carga/masa la radiación es nula.

Problema 15:
Determinar la intensidad de la radiación de una carga que se mueve siguiendo una trayectoria circular en un campo magnético uniforme y constante de magnitud B.

Problema 16:
Hallar la radiación total que se emite al chocar frontalmente dos partículas con cargas de igual signo. Ayuda: introducir la masa reducida $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ y el radio vector $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ para escribir el momento dipolar del sistema.

Problema 17:
Hallar la radiación total emitida cuando una carga pasa junto a otra con una velocidad v suficientemente grande (si bien $v \ll c$) como para que se pueda considerar pequeña su desviación respecto del movimiento rectilíneo. Ayuda: introducir el parámetro de impacto b para escribir $r(t)$ e introducir la expresión en una de las integrales del problema anterior.

Problema 18:
Considérese una antena lineal, extendida entre $z = d/2$ y $z = -d/2$, y alimentada en su centro de manera que la corriente a lo largo de la misma está dada por

$$I(z,t) = I_0 \left(1 - 2\frac{|z|}{d}\right) \cos(\omega t).$$

Encontrar la distribución angular de la potencia emitida, y la potencia total, suponiendo que $d \ll \lambda$, donde λ es una longitud de onda característica de la radiación. Ayuda: usar la ecuación de continuidad $\nabla \cdot \mathbf{j} + \partial\rho/\partial t = 0$ para obtener el momento dipolar del sistema.