

Ejercicios de Introducción a la Óptica Cuántica - C. Cormick - semana 1

Problemas para el primer día

1. Energías y frecuencias típicas

- (a) Consideramos el láser de titanio-zafiro, con $\lambda = 852$ nm, correspondiente a una transición del átomo de cesio. Calcular la frecuencia de la radiación y a qué valor de temperatura corresponde la energía $\hbar\omega$ ($k_B T = \hbar\omega$). Si se tiene un átomo de dos niveles con esa diferencia de energía entre ellos, en equilibrio térmico con un ambiente a 300 K, ¿cuál es la probabilidad de encontrar al átomo en el estado excitado?
- (b) La transición más importante en el sodio (^{23}Na) tiene una longitud de onda de $\lambda_0 = c/\nu_0 = 589$ nm. ¿Qué velocidad del átomo correspondería a una energía cinética igual a $\hbar\nu_0$? Supongamos que el átomo está inicialmente en reposo y en su estado fundamental. Si absorbe un fotón con energía $\hbar\nu_0$, teniendo en cuenta la conservación de energía e impulso, ¿cuál será la velocidad final v del átomo y cuál su energía cinética final E_{cin} ? Hacer la cuenta más fácil usando que $v \ll c$. ¿Cuál es la frecuencia de un fotón que tiene esa energía E_{cin} ?

Valores útiles: $c \simeq 3 \cdot 10^8$ m/s, $\hbar \simeq 6.6 \cdot 10^{-34}$ Js, $k_B \simeq 1.4 \cdot 10^{-23}$ J/K, u.m.a $\simeq 1.7 \cdot 10^{-27}$ kg.

2. Oscilaciones de Rabi - átomo de dos niveles

Consideramos un átomo con dos niveles internos, $|g\rangle$ (el fundamental) y $|e\rangle$ (un estado excitado). El átomo se encuentra bajo la acción de un láser tal que, en el marco rotante con el láser, el Hamiltoniano para la evolución de los niveles internos es de la forma:

$$H = \frac{\hbar}{2} [-\Delta\sigma_z + \text{Re}(\Omega)\sigma_x - \text{Im}(\Omega)\sigma_y]$$

donde $\Omega \in \mathbb{C}$ es proporcional a la amplitud del láser y Δ la desintonía respecto del átomo, $\Delta = \omega_L - \omega_a$. Aquí estamos eligiendo el cero de energía en el punto medio entre los dos niveles (esto siempre se puede cambiar agregando a H un término proporcional a la identidad).

Nota 1: Para evitar ambigüedades, cuando tratemos con átomos de dos niveles vamos a fijar la convención de que la base es $\{|e\rangle, |g\rangle\}$, de modo que las matrices de Pauli en notación de Dirac son:

$$\sigma_x = |g\rangle\langle e| + |e\rangle\langle g|, \quad \sigma_y = i(|g\rangle\langle e| - |e\rangle\langle g|), \quad \sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$$

Definiendo $\sigma_{\pm} = (\sigma_x \pm i\sigma_y)/2$, el operador σ_+ lleva al nivel excitado y σ_- hace lo opuesto.

- (a) Se quiere reescribir el Hamiltoniano en la forma $H = (\hbar/2)\tilde{\Omega}\hat{n} \cdot \vec{\sigma}$, donde $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$, $\hat{n}$ es un vector real de norma 1, y $\tilde{\Omega} \in \mathbb{R}$. Escribir $\tilde{\Omega}$ y $\hat{n}$ en función de los parámetros Δ y Ω .
- (b) (Optativo) Mostrar que $(\hat{n} \cdot \vec{\sigma})^2 = \mathbb{I}$. Usando esta propiedad y el desarrollo en serie de potencias de la exponencial, del seno y del coseno, demostrar que $U(t)$ tiene la forma:

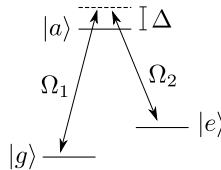
$$U(t) = e^{-iHt/\hbar} = \cos(\tilde{\Omega}t/2)\mathbb{I} - i\sin(\tilde{\Omega}t/2)\hat{n} \cdot \vec{\sigma}$$

- (c) Usando la expresión del ítem anterior, calcular la probabilidad de encontrar un átomo en el estado excitado como función del tiempo, suponiendo que el estado inicial es el fundamental. Indicar cuál es la población máxima que puede transferirse al estado excitado dados Ω y Δ .
- (d) Considerar el caso muy lejos de la resonancia, $|\Delta| \gg |\Omega|$. Mostrar usando teoría de perturbaciones que la energía del estado $|g\rangle$ sufre por efecto del láser un corrimiento aproximadamente igual a $\Omega^2/(4\Delta)$.

Nota 2: $|\Omega|$ suele llamarse “frecuencia de Rabi”, ya que es la frecuencia de las oscilaciones en la población para el caso resonante $\Delta = 0$, pero $U(t)$ es periódico con la mitad de esa frecuencia ya que $U(t = 2\pi/\tilde{\Omega}) = -\mathbb{I}$.

3. Átomo de tres niveles en configuración lambda

Consideramos un átomo con tres niveles internos, que llamamos $|g\rangle$, $|e\rangle$, y $|a\rangle$ (por “auxiliar”). Los niveles $|g\rangle$ y $|e\rangle$ están conectados con $|a\rangle$ a través de transiciones dipolares, pero no hay una transición directa que los conecte entre sí. Es posible sin embargo conectarlos utilizando el nivel $|a\rangle$ como paso intermedio, en una situación que involucra dos láseres, cada uno de ellos muy lejos de la resonancia (ver figura). Esto se conoce como un sistema Λ (aquí no es importante la relación de energías entre $|g\rangle$ y $|e\rangle$, pero sí que ambos niveles sean metaestables).



Tomando el cero de energía en el nivel $|g\rangle$ y usando una aproximación de onda rotante, el Hamiltoniano del sistema es de la forma:

$$H = E_e|e\rangle\langle e| + E_a|a\rangle\langle a| + \hbar\frac{\Omega_1}{2}(|a\rangle\langle g|e^{-i\omega_1 t} + |g\rangle\langle a|e^{i\omega_1 t}) + \hbar\frac{\Omega_2}{2}(|a\rangle\langle e|e^{-i\omega_2 t} + |e\rangle\langle a|e^{i\omega_2 t})$$

donde $\omega_1 = E_a/\hbar + \Delta$, $\omega_2 = (E_a - E_e)/\hbar + \Delta$. Asumimos que Ω_j es real (en este caso esto no implica una pérdida de generalidad). Para los cálculos que siguen vamos a concentrarnos en la evolución dada por el Hamiltoniano.

- (a) Pasar a una representación rotante con el láser, es decir tomando $H_0 = E_e|e\rangle\langle e| + \hbar\omega_1|a\rangle\langle a|$, de modo que el Hamiltoniano H' en esta representación está dado por:

$$H'(t) = U_0(t)^\dagger H U_0(t) - H_0$$

donde $U_0(t) = e^{-iH_0 t/\hbar}$. Calcular $H'(t)$ y mostrar que resulta independiente del tiempo.

- (b) Definimos ahora combinaciones lineales de $|g\rangle$ y $|e\rangle$ que corresponden a un estado “oscuro” y uno “brillante”:

$$|o\rangle = \frac{\Omega_2}{\Omega}|g\rangle - \frac{\Omega_1}{\Omega}|e\rangle, |b\rangle = \frac{\Omega_1}{\Omega}|g\rangle + \frac{\Omega_2}{\Omega}|e\rangle$$

donde $\Omega^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2$. Verificar que $H'|o\rangle = 0$, es decir que efectivamente $|o\rangle$ es un estado oscuro del sistema (si la emisión espontánea lleva el átomo a este estado, entonces se mantendrá en él).

- (c) Verificar también que el Hamiltoniano resultante se puede escribir en la forma:

$$H' = -\hbar\Delta|a\rangle\langle a| + \hbar\frac{\Omega}{2}(|a\rangle\langle b| + |b\rangle\langle a|)$$

- (d) Supongamos ahora que la desintonía $|\Delta|$ es mucho más grande que Ω y que el ancho de línea del nivel $|a\rangle$. En este caso, las transiciones que llevan al nivel $|a\rangle$ están lejos de resonancia mientras que los procesos de dos fotones son resonantes. Por analogía con lo visto en el problema 2, podemos pensar en el efecto del láser como un corrimiento del nivel $|b\rangle$ en un valor $\Omega^2/(4\Delta)$. Olvidándonos por un rato del nivel $|a\rangle$, este efecto se puede pensar como un término efectivo en el Hamiltoniano de la forma:

$$H'_{\text{ef}} = \frac{\Omega^2}{4\Delta}|b\rangle\langle b|.$$

Mostrar que este Hamiltoniano efectivo incluye términos de acoplamiento entre $|g\rangle$ y $|e\rangle$ con una frecuencia de Rabi efectiva igual a $|\Omega_1\Omega_2/(2\Delta)|$.

Problemas de tarea para hacer entre la primera y la segunda semana

4. Eliminación adiabática en un átomo de tres niveles

Consideramos en este ejercicio otra vez el átomo con tres niveles internos del problema 3. El objetivo de este problema es derivar de una manera más generalizable el Hamiltoniano efectivo del último ítem. El procedimiento es una forma de “eliminación adiabática” (basada en la existencia de una separación de escalas temporales). Aclaración: hay un montón de métodos para esto, al igual que para derivar ecuaciones maestras.

Empezamos por el mismo Hamiltoniano inicial que en el problema 3. Para simplificar asumimos $\Omega_1 = \Omega_2$ (esto no es esencial). También asumimos que la desintonía $|\Delta|$ es mucho más grande que Ω y que el ancho de línea del nivel $|a\rangle$. En este caso, las transiciones que llevan al nivel $|a\rangle$ están lejos de resonancia mientras que los procesos de dos fotones son resonantes.

- (a) Pasar a la representación de interacción con $H_0 = E_e|e\rangle\langle e| + E_a|a\rangle\langle a|$, de modo que el Hamiltoniano $H'(t)$ en esta representación está dado por:

$$H'(t) = U_0(t)^\dagger H U_0(t) - H_0$$

donde $U_0(t) = e^{-iH_0 t/\hbar}$. Calcular $H'(t)$ y mostrar que todos sus términos oscilan a una frecuencia mucho más rápida que la escala asociada a su amplitud.

- (b) El procedimiento que sigue se basa en esa diferencia de escalas temporales. Por claridad, conviene hacer una expansión en el parámetro adimensional y pequeño $\epsilon = \Omega/\Delta$. Para esto, definimos una variable temporal adimensional $\tau = t\Delta$, con lo que el Hamiltoniano obtenido en el ítem anterior se transforma según $H' \rightarrow \tilde{H} = H'/\Delta$. Escribir $\tilde{H}(\tau)$ y ver que sus términos son proporcionales a $\hbar\epsilon$, y oscilan en una escala temporal de orden 1.
- (c) La evolución temporal $\tilde{U}(\tau)$ en esta representación puede escribirse como serie de potencias en ϵ según:

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\tau) &= \sum_{n=0} \tilde{U}_n(\tau) \\ &= \mathbb{I} - \frac{i}{\hbar} \int_0^\tau d\tau_1 \tilde{H}(\tau_1) - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^\tau d\tau_2 \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \tilde{H}(\tau_2) \tilde{H}(\tau_1) + \sum_{n>2} \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \int_0^\tau d\tau_n \dots \int_0^{\tau_{n-1}} d\tau_1 \tilde{H}(\tau_n) \dots \tilde{H}(\tau_1) \end{aligned}$$

Notar que $\tilde{U}_n(\tau)$ es proporcional a ϵ^n (y a alguna función de la variable adimensional τ).

En primer lugar, evaluar $\tilde{U}_1(\tau)$, el término de orden uno del operador de evolución, y mostrar que es una función puramente oscilatoria de τ , es decir que pasado un tiempo τ de orden 1 (o sea, un tiempo t de orden Δ^{-1}) esta función ya no sigue aumentando, y siempre resulta de orden ϵ .

- (d) Evaluar ahora el término de segundo orden en el operador de evolución, $\tilde{U}_2(\tau)$, y mostrar que tiene dos componentes: una parte proporcional a τ , que aumenta en el tiempo, y otra parte que es oscilatoria. Indicar cuál es la condición sobre τ para que el término lineal en τ proveniente de $\tilde{U}_2$ sea mucho mayor que los términos oscilatorios de $\tilde{U}_1$. Mostrar que esta condición también implica que los términos oscilatorios en $\tilde{U}_2$ pueden despreciarse. Escribir la misma condición pero para la variable temporal t .
- (e) En forma similar pueden evaluarse todos los términos de la expansión. Los términos de orden impar siempre llevan a contribuciones oscilatorias en τ , mientras que los pares siempre dan lugar a algunas contribuciones que no oscilan. La idea es identificar las contribuciones dominantes con la evolución dada por un Hamiltoniano efectivo $\tilde{H}_{\text{eff}}$ independiente del tiempo. En particular, el término lineal en τ proveniente de $\tilde{U}_2$ corresponde al primer orden de la evolución efectiva, $\tilde{U}_{1,\text{eff}}(\tau)$. Inferir de $\tilde{U}_{1,\text{eff}}(\tau)$ la forma del Hamiltoniano efectivo $\tilde{H}_{\text{eff}}$. Notar que el acoplamiento al nivel $|a\rangle$ desaparece, mientras que se genera un acoplamiento efectivo entre los otros dos niveles, además del AC-Stark shift.
- (f) Volver a la representación inicial con tiempo t (es decir multiplicar el Hamiltoniano obtenido por Δ). Indicar el valor del AC-Stark shift para cada uno de los tres niveles, y si la energía efectiva de cada uno aumenta o disminuye según sea el signo de Δ . Indicar también cuál es la frecuencia del acoplamiento efectivo entre $|g\rangle$ y $|e\rangle$ (notar que el tratamiento perturbativo implica que esta frecuencia debe ser mucho menor que Ω).

Los siguientes problemas son sobre matrices densidad, matrices densidad reducidas, y entrelazamiento. Ante la duda, consultar Nielsen-Chuang o preguntar!

5. *Matrices densidad* (optativo, para quienes no lo vean trivial)

Consideramos un ensamble de átomos con dos niveles internos, $|g\rangle$ (el fundamental) y $|e\rangle$ (un estado excitado).

- Supongamos que todos los átomos están en el estado $|\psi\rangle = 3/2|g\rangle - i/2|e\rangle$. ¿Cuál es la matriz densidad en la base $\{|e\rangle, |g\rangle\}$?
- Supongamos un segundo ensamble donde 75% de los átomos están en el estado fundamental y el resto en el estado excitado. ¿Cómo es la matriz densidad de un átomo en este ensamble?
- ¿Cómo se puede distinguir experimentalmente entre estos dos ensambles?
- Sin tener en cuenta la emisión espontánea, ¿es posible aplicar campos eléctricos que lleven cada uno de estos ensambles a uno donde los átomos estén todos en el estado excitado? ¿Y si se incluye la emisión espontánea?
- Mostrar que cualquier matriz densidad de un átomo de dos niveles se puede escribir en la forma $\rho = 1/2(\mathbb{I} + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})$, donde $\vec{p}$ es el “vector de Bloch”.

6. *Entrelazamiento y matriz densidad reducida* (optativo, para quienes no lo vean trivial)

- Mostrar que el estado $(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle)/\sqrt{2}$ es entrelazado, es decir, no es posible escribirlo como un producto de la forma $|\psi_a\rangle \otimes |\psi_b\rangle$.
- Para ese mismo estado, calcular la matriz densidad reducida de uno de los subsistemas.

7. *Entropía y entrelazamiento*

Para un estado puro $|\psi\rangle$, la medida de entrelazamiento más convencional es la “entropía de entrelazamiento”:

$$E(|\psi\rangle\langle\psi|) = S(\text{tr}_A|\psi\rangle\langle\psi|) = S(\text{tr}_B|\psi\rangle\langle\psi|)$$

con S la entropía de von Neumann $S(\rho) = -\text{tr}[\rho \log \rho]$, donde la base del logaritmo varía según el caso, y tr_B denota la traza parcial sobre el subsistema B.

- Mostrar que si $|\psi\rangle = (1/\sqrt{N}) \sum_{j=1}^N |j\rangle|j\rangle$, con $\{|j\rangle\}$ una base ortonormal para cada subsistema, entonces $S = \log(N)$, y que si el estado es separable $S = 0$ (tener en cuenta que $\lim_{x \rightarrow 0} x \log x = 0$).
- Demostrar que $S(\text{tr}_A|\psi\rangle\langle\psi|) = S(\text{tr}_B|\psi\rangle\langle\psi|)$ (ayuda: usar la descomposición de Schmidt).
- Mostrar por qué esta medida de entrelazamiento no sirve para estados mixtos (reemplazando $|\psi\rangle\langle\psi|$ por ρ) dando un ejemplo de un estado separable para el que $E \neq 0$. Demostrar que además, para estados arbitrarios no es cierto que $S(\text{tr}_A\rho) = S(\text{tr}_B\rho)$.
Obs: en algunos contextos se considera que un requisito para que algo se considere una auténtica “medida de entrelazamiento” es que sea igual a E en caso de aplicarse a estados puros.
- Opcional: Suponer que se tienen 2 copias del estado bipartito $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, es decir, si ρ es el estado de un par entrelazado, hay 2 de estos pares, donde Alice tiene el primer elemento de cada par (subsistemas A_1, A_2) y Bob el segundo (B_1, B_2). Mostrar que entonces $E(\rho_{A_1 B_1} \otimes \rho_{A_2 B_2}) = 2E(\rho)$. Mostrar también que para n copias $E(\rho^{\otimes n}) = nE(\rho)$, y que para dos estados bipartitos diferentes $E(\rho_1 \otimes \rho_2) = E(\rho_1) + E(\rho_2)$ (es decir E es una cantidad extensiva).