Ejercicios de Introducción a la Óptica Cuántica - C. Cormick - semana 3

Problema para el cuarto día

16. *Ecuación maestra para un entorno térmico*

Consideramos un átomo de dos niveles que interactúa con un entorno de modos a una temperatura T tal que la población de equilibrio del estado excitado es no despreciable (es importante si esos dos niveles no corresponden a una transición óptica sino, por ejemplo, de microondas). La ecuación maestra en la representación rotante a la frecuencia ω_0 del átomo es de la forma:

$$\dot{\tilde{\rho}} = \mathcal{L}_\Gamma \tilde{\rho} = \frac{\Gamma}{2}[(\bar{n}+1)(2\sigma_-\tilde{\rho}\sigma_+ - \{\sigma_+\sigma_-, \tilde{\rho}\}) + \bar{n}(2\sigma_+\tilde{\rho}\sigma_- - \{\sigma_-\sigma_+, \tilde{\rho}\})]$$

donde $\bar{n}$ es la población de equilibrio a la temperatura T de los modos resonantes con el átomo. En esta fórmula, la contribución proporcional a $(\bar{n}+1)$ corresponde a desexcitación del átomo acompañada de emisión de fotones, mientras que la proporcional a $\bar{n}$ se origina en el proceso opuesto (absorción y excitación). El estado $\tilde{\rho}$ en esta representación se relaciona con el estado ρ en representación de Schrödinger a través de la ecuación:

$$\rho(t) = U_0(t)\tilde{\rho}(t)U_0^\dagger(t)$$

donde $U_0(t) = \exp(-iH_0t/\hbar)$, $H_0 = \hbar\omega_0|e\rangle\langle e|$.

(a) Escribir las ecuaciones para la evolución de los elementos de matriz $\tilde{\rho}_{ee}$ y $\tilde{\rho}_{ge}$. Mostrar que las contribuciones de excitación y desexcitación tienen efectos opuestos en la evolución de $\tilde{\rho}_{ee}$, pero ambas dan lugar a decaimiento de los elementos no diagonales de la matriz densidad.

(b) Indicar cuál es el estado asintótico. Resolver la evolución temporal de la matriz densidad completa en esta representación e indicar con qué tasa evolucionan las poblaciones y las coherencias (notar que la relación entre ambas tasas es independiente de $\bar{n}$). Mostrar que el estado asintótico se corresponde con la condición de equilibrio térmico.

(c) Usando la relación dada entre las dos representaciones, mostrar que la ecuación de evolución temporal en representación de Schrödinger toma la forma:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H_0, \rho] + U_0(\mathcal{L}_\gamma U_0^\dagger \rho U_0)U_0^\dagger.$$

Luego usar la forma explícita de $\mathcal{L}_\gamma$ para mostrar que:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H_0, \rho] + \mathcal{L}_\gamma \rho,$$

es decir, la parte no unitaria tiene la misma forma en las dos representaciones. Ayuda: usar que al aplicar los operadores de evolución temporal, σ_+ y σ_- adquieren fases opuestas, y que $\sigma_+\sigma_-$ y $\sigma_-\sigma_+$ son invariantes.

(d) Explicar cómo cambian los items (a) y (b) en esta representación.

Problema para el quinto día

17. *Evolución de observables usando la ecuación maestra*

El campo correspondiente a un modo en una cavidad interactúa, debido a reflexión imperfecta en los espejos, con un continuo de modos exteriores que induce pérdidas de los fotones dentro de la cavidad. La intensidad del campo dentro de la cavidad puede mantenerse constante si se bombea en forma continua por medio de un láser. En este escenario, la ecuación para la evolución del modo es de la forma:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \mathcal{L}_\kappa \rho$$

donde la evolución coherente debida al láser y el Hamiltoniano libre de la cavidad es de la forma:

$$H = -\hbar\Delta a^\dagger a - \mathrm{i}\hbar\eta(a - a^\dagger)$$

en el marco rotante con la frecuencia del láser, con $\Delta = \omega_L - \omega_c$, y donde por simplicidad tomamos $\eta \in \mathbb{R}$ (que equivale a medir la fase del campo con respecto a la del láser) . La evolución no unitaria dada por las pérdidas se describe a través de:

$$\mathcal{L}_\kappa \rho = \kappa \left(2a\rho a^\dagger - \{a^\dagger a, \rho\}\right)$$

(a) Escribir la ecuación para la evolución temporal de un observable, usando $\langle \dot{A} \rangle = Tr(A\dot{\rho})$.

(b) Evaluar para los operadores correspondientes al número de fotones y las dos cuadraturas del campo (para ese modo).

(c) Calcular los valores asintóticos de los observables considerados y discutir su dependencia con respecto a los distintos parámetros del problema.

Problema de tarea (traer resuelto en la última semana)

18. *Modelo de Jaynes-Cummings y decaimiento espontáneo para un ensamble formando un "superátomo"*

Volvamos al superátomo del ejercicio 15. Supongamos que cada átomo interactúa con el continuo de modos del campo exterior a la cavidad que induce emisión espontánea, de modo que la evolución completa de un átomo más cavidad está dada por una ecuación de la forma:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \mathcal{L}_\Gamma \rho$$

donde

$$\mathcal{L}_\Gamma \rho = \frac{\Gamma}{2}(2\sigma_- \rho \sigma_+ - \{\sigma_+ \sigma_-, \rho\}).$$

Si $\Gamma \gg |g|$, la evolución coherente se encuentra dominada por el decaimiento espontáneo y no pueden verse oscilaciones coherentes en la dinámica.

Una manera de mejorar esto es incorporando un ensamble de N átomos, con $N \gg 1$, que se acoplen colectivamente al campo de la cavidad pero no al decaimiento espontáneo (esto no siempre es posible). En lo sucesivo se analiza esta alternativa.

(a) Escribir cuál es la forma de los términos de evolución no unitaria, asumiendo que el proceso de emisión espontánea involucra a cada átomo por separado (esto no siempre es una buena aproximación).

(b) Teniendo en cuenta todos los términos de la evolución temporal, calcular la ecuación de evolución para la cantidad $\tilde{N}$ y mostrar que ya no se conserva, pero no puede aumentar.

(c) Nos restringimos al subespacio con una sola excitación como máximo. Mostrar que la acción de la parte de evolución no unitaria actúa en el subespacio de interés igual que si escribiéramos la evolución no unitaria de un único átomo cuyo estado excitado es $|\phi\rangle$ y con la misma tasa Γ que para un único átomo (lo que implica que aumentar el número de átomos permite a veces aumentar el acoplamiento efectivo sin aumentar la tasa de decaimiento).

Ayuda: Para los términos en el anticonmutador, usar que $\sum_j \sigma_+^j \sigma_-^j |0, \phi\rangle = |0, \phi\rangle$ mientras que $\sum_j \sigma_+^j \sigma_-^j |0, g\rangle = \sum_j \sigma_+^j \sigma_-^j |1, g\rangle = 0$.