Ejercicios de Introducción a la Óptica Cuántica - C. Cormick - semana 4

Problemas para el sexto día

19. Bombeo óptico

Consideramos un problema con un láser con dirección de propagación a lo largo del eje z y polarización circular σ_+ . Consideramos el eje z como dirección de cuantización para el momento angular. Tomamos un átomo cuyo estado fundamental tiene momento angular orbital $l = 0$ y espín $s = 1/2$, y llamamos a los dos estados fundamentales $|g_{\pm 1/2}\rangle$ según la proyección del espín en z . Asumimos que la intensidad del láser es débil de modo de trabajar en el límite no saturado, es decir, la población del estado excitado es despreciable.

- Consideremos que el láser está cerca de resonancia con una transición entre el nivel fundamental $|g_{\pm 1/2}\rangle$ y un estado excitado con $l = 1$, $s = 1/2$, $j = 1/2$ (es decir también con dos subniveles, según la proyección m_j en la dirección z). Usando los coeficientes de Clebsch-Gordan, escribir los dos subniveles del estado excitado en términos de los autoestados de L_z y S_z , es decir de los estados caracterizados por los números cuánticos m_l , m_s .
- Las reglas de selección para transiciones ópticas (debidas a campos con un frente de onda plano, sin estructura espacial) implican que el estado de espín no puede cambiar, y que la componente z del momento angular orbital del átomo cambia al absorber un fotón según:
 - Polarización σ_+ : $\Delta m_l = +1$
 - Polarización σ_- : $\Delta m_l = -1$
 - Polarización σ_0 : $\Delta m_l = 0$

(para un campo que se propaga en z , la polarización debe ser en el plano x - y y siempre puede escribirse como combinación de σ_+ y σ_-). Dibujar en un esquema los dos estados fundamentales y los dos excitados y, usando estas reglas, indicar las transiciones que el láser con polarización σ_+ puede inducir en este sistema en la base de autoestados del Hamiltoniano del átomo, es decir usando el número cuántico m_j . Notar que estas transiciones son las mismas para absorción y emisión estimulada (es decir son reversibles).

- Teniendo en cuenta que la emisión espontánea puede ser, en principio, en cualquier dirección de propagación y con cualquier polarización, dibujar las transiciones posibles en un proceso de emisión espontánea. Notar que esta clase de procesos sólo corresponde a desexcitación del átomo.
- Usando los resultados de los ítems anteriores, explicar cuál es el estado asintótico del átomo.
- Repetir los mismos pasos pero para un caso en que el estado excitado considerado tiene $l = 1$, $s = 1/2$, $j = 3/2$.

20. Trampas ópticas

Suponga un sistema de átomos neutros de ^{87}Rb . Considere que se tienen dos haces láser de igual longitud de onda e igual amplitud, ambos polarizados en $\hat{z}$, y cuyas direcciones de propagación se encuentran sobre el plano x - y formando un ángulo α entre ambas. Tratamos el campo de cada láser como una onda plana, es decir, para cada haz despreciamos la variación de cada campo en la dirección perpendicular a $\vec{k}$.

- Si $\lambda = 820$ nm, indique cuál es la periodicidad del potencial óptico que se forma como función de α , y en qué dirección se forma la red respecto de las direcciones de propagación de los láseres.
- Si la amplitud del potencial óptico es $V_{\max} - V_{\min} = 2\pi\hbar \times 5$ kHz, indicar a qué temperatura corresponde esta energía, y cuál es la frecuencia asociada a la oscilación de un átomo en el fondo de uno de los pozos.

Problemas para el último día

21. Enfriamiento Sísifo

Supongamos un sistema de cuatro niveles, dos fundamentales y dos excitados, es decir cada nivel tiene $j = 1/2$. Consideramos además una única dirección de movimiento z , y definimos los subniveles según el número cuántico j_z . El campo está compuesto por dos láseres con polarización lineal en ejes ortogonales x e y , propagándose en sentidos opuestos en la dirección z , y con igual amplitud.

(a) Muestre que las frecuencias de Rabi para las transiciones atómicas son de la forma:

$$\Omega_+ = \Omega_0 \cos(kz + \varphi) \quad (1)$$

$$\Omega_- = \Omega_0 \sin(kz + \varphi) \quad (2)$$

donde los subíndices $\pm$ indican la polarización del campo en cada componente, es decir, $\Omega_{\pm}$ corresponde a polarización $\sigma_{\pm}$.

(b) Consideremos el límite no saturado y con $|\Delta_0| \gg \Gamma$. Muestre que las diferentes frecuencias de Rabi dan lugar a diferentes corrimientos de energía de los dos estados del subnivel fundamental, de la forma:

$$\Delta_{-1/2} \simeq \frac{\Omega_+^2}{\Delta_0} = \frac{\Omega_0^2 \cos^2(kz + \varphi)}{\Delta_0} \quad (3)$$

$$\Delta_{+1/2} \simeq \frac{\Omega_-^2}{\Delta_0} = \frac{\Omega_0^2 \sin^2(kz + \varphi)}{\Delta_0} \quad (4)$$

donde Δ_0 es el detuning de los láseres respecto de las transiciones atómicas, definido en forma tal que un detuning positivo es un corrimiento al azul y uno negativo es al rojo.

(c) La emisión espontánea puede darse desde un subnivel excitado a uno fundamental con igual valor de j_z , o a uno con el valor opuesto. Llamamos Γ_- a la tasa de decaimiento a igual j_z y $\Gamma_{\neq}$ a la otra. Sabiendo que $\Gamma_{\neq} < \Gamma_-$, indicar qué signo debe tener Δ_0 para que estos campos enfríen el movimiento del átomo.

22. Compuertas de 2 qubits con iones atrapados

Para realizar computación cuántica con un conjunto de sistemas de dos niveles (qubits), es suficiente poder aplicar transformaciones unitarias arbitrarias sobre cada uno de los qubits, y al menos un tipo de operaciones unitarias capaces de generar entrelazamiento.

Este ejercicio muestra en forma simplificada cómo es posible, en principio, realizar esta clase de operaciones entre los estados internos de dos iones por medio de un modo normal de oscilación común a los dos. Vamos a considerar que cada ion es un sistema de tres niveles: dos de ellos, $|g\rangle$ y $|e\rangle$, corresponden a los estados de la base computacional, y un tercero, $|e'\rangle$, es puramente auxiliar. La oscilación del modo centro de masa corresponde a un oscilador armónico cuantizado con operadores a y $a^\dagger$.

Por medio de un láser actuando sobre el ion j ($j = 1$ ó 2) con la frecuencia apropiada podemos generar un Hamiltoniano que en una representación rotante con respecto al Hamiltoniano H_0 del sistema libre tome la forma:

$$H_j = \hbar \frac{\Omega}{2} [(|e\rangle\langle g|)_j a + (|g\rangle\langle e|)_j a^\dagger]$$

(es decir es análogo al Hamiltoniano de Jaynes-Cummings del problema 5, y no actúa sobre el nivel $|e'\rangle$). Alternativamente, cambiando la frecuencia y/o la polarización del láser podemos generar un Hamiltoniano H'_j del mismo tipo pero que involucra al estado $|e'\rangle$ en lugar de $|e\rangle$.

Calcular en cada paso los efectos de la siguiente secuencia, suponiendo que el estado inicial es de la forma:

$$|\psi_0\rangle = \frac{|g\rangle + |e\rangle}{\sqrt{2}} \frac{|g\rangle + |e\rangle}{\sqrt{2}} |0\rangle$$

que es un estado sin entrelazamiento entre los dos iones, y donde el modo se encuentra en su estado fundamental.

(a) Se aplica el Hamiltoniano H_1 durante un tiempo π/Ω , lo que opera sobre el ion 1 y el modo la transformación:

$$|g\rangle|1\rangle \rightarrow -i|e\rangle|0\rangle, \quad |e\rangle|0\rangle \rightarrow -i|g\rangle|1\rangle$$

mientras que el estado $|g\rangle|0\rangle$ no se modifica.

(b) Se aplica el Hamiltoniano H'_2 durante un tiempo $2\pi/\Omega$, lo que opera sobre el ion 2 y el modo la transformación:

$$|g\rangle|1\rangle \rightarrow -|g\rangle|1\rangle, \quad |e'\rangle|0\rangle \rightarrow -|e'\rangle|0\rangle$$

mientras que el estado $|g\rangle|0\rangle$ no se modifica, ni tampoco ningún estado en que el ion 2 se encuentre en $|e\rangle$.

(c) Se aplica nuevamente un pulso igual al del primer paso.

Mostrar que el estado final es un estado en el que el modo vuelve al estado fundamental, mientras que los iones 1 y 2 se encuentran en un estado máximamente entrelazado de dos qubits, es decir, sus matrices densidad reducidas son máximamente mixtas mientras que el estado del sistema conjunto es puro.

Nota: Esta es la idea de la propuesta de Cirac y Zoller, y requiere de enfriamiento perfecto del modo. Esto hace que esta compuerta sea poco práctica. Las operaciones entrelazantes entre iones siguen propuestas posteriores (por ejemplo la de Mølmer-Sørensen) que son mucho menos demandantes en términos de la preparación del estado de movimiento.