

La clase pasada vimos:

Apantallamiento (screening) del plasma

En esta clase veremos:

Límites de larga longitud de onda y estático
3D y 2D

Longitud de screening estático

Potencial Coulombiano apantallado o de Yukawa

REPASO

*Coulomb Screening
by Mobile Charges
Applications to Materials Science,
Chemistry, and Biology*

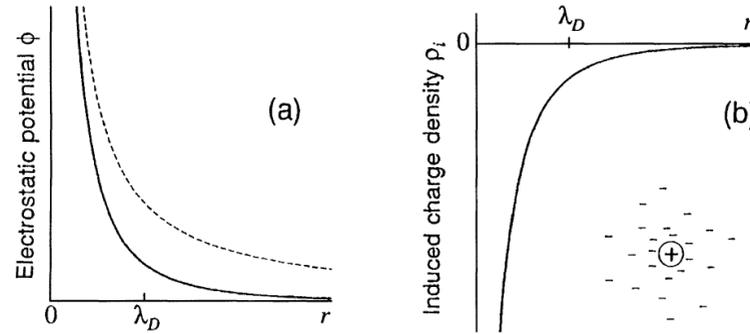
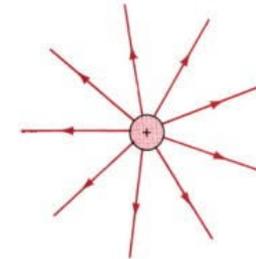


FIGURE Int.3. (a) Screened Coulomb potential around a point charge (here positive) in a Boltzmann gas of charged particles. The normal Coulomb potential is shown for comparison, as the dashed line. (b) Induced charge density in the screening cloud.

$$V_{eff}(r) = V(r) + V_{ind}(r)$$



Carga de prueba con **variación oscilatoria** y encendido adiabático: $\exp(-i(\omega + i\delta)t)$

Planteamos ansatz: $\langle a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \rangle \propto e^{-i(\omega + i\delta)t}$

Random-phase approximation en el término Coulombiano ($\mathbf{p} = \mathbf{q}$):

$$\frac{d}{dt} \langle a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \rangle = i(\epsilon_{k-q} - \epsilon_k) \langle a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \rangle - \frac{iV_{eff}(q)}{\hbar} (f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - f_{\mathbf{k}})$$

REPASO

Potencial inducido satisface la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 V_{ind}(r) = \frac{4\pi|e|\rho(r)}{\epsilon_0}$$

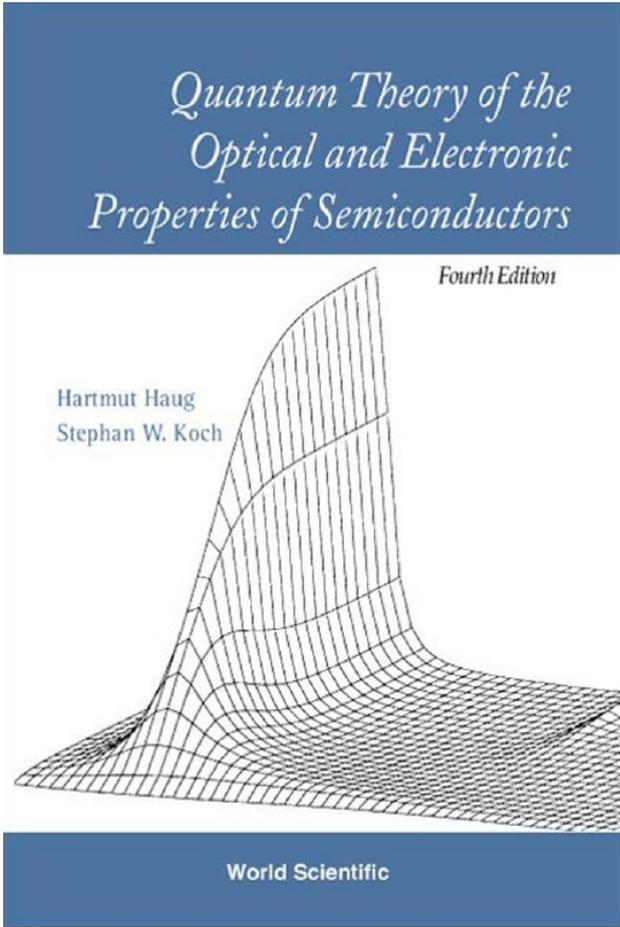
$$V_{eff}(q) = \frac{V_q}{1 - V_q P^1(q, \omega)} = \frac{V_q}{\epsilon(q, \omega)} \equiv V_s(q, \omega)$$

$$\epsilon(q, \omega) = 1 - V_q \sum_{\mathbf{k}} \frac{f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - f_{\mathbf{k}}}{\hbar(\omega + i\delta + \epsilon_{k-q} - \epsilon_k)}$$



Fórmula de Lindhard para la función dieléctrica longitudinal

Estamos viendo: Plasmones



8. Plasmons and Plasma Screening	129
8.1 Plasmons and Pair Excitations	129
8.2 Plasma Screening	137
8.3 Analysis of the Lindhard Formula	140
8.3.1 Three Dimensions	140
8.3.2 Two Dimensions	143
8.3.3 One Dimension	145
8.4 Plasmon–Pole Approximation	146

$$\epsilon(q, \omega) = 1 - V_q \sum_{\mathbf{k}} \frac{f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - f_{\mathbf{k}}}{\hbar(\omega + i\delta + \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}})}$$

Tomamos el límite de long wavelength como hicimos en la clase 15:

$$E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - E_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2}{2m}(k^2 - 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + q^2) - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \simeq -\frac{\hbar^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{m}$$

$$f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - f_{\mathbf{k}} = f_{\mathbf{k}} - \mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} + \dots - f_{\mathbf{k}} \simeq -\mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}$$

Habíamos llegado a que: $\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 n}{\epsilon_0 m} = \omega_{pl}^2$ $q \rightarrow 0, \omega_{q \rightarrow 0} = \omega_{pl}$:

Satisface:
$$V_q \sum_{\mathbf{k}} \frac{f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - f_{\mathbf{k}}}{\hbar(\omega_q + \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}})} = 1$$

$$\epsilon(q, \omega) = 1 - V_q \sum_{\mathbf{k}} \frac{f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - f_{\mathbf{k}}}{\hbar(\omega + i\delta + \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}})}$$

Haciendo el mismo tipo de análisis se llega a que:

$$\epsilon(0, \omega) = 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}$$

Igual a la función dieléctrica que obtuvimos en la clase 3 con el modelo de Drude para el límite $q \rightarrow 0$

Nos sirvió para analizar la transparencia de los metales en función de la frecuencia de la radiación aplicada.

¿Porqué no hay que poner metales en el microondas?

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - V_q \sum_{\mathbf{k}} \frac{f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - f_{\mathbf{k}}}{\hbar(\omega + i\delta + \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}})} \quad \longrightarrow \quad \epsilon(\mathbf{q}, 0) = 1 - V_q \sum_{\mathbf{k}} \frac{f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - f_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - E_{\mathbf{k}}}$$

$$E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - E_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2}{2m}(k^2 - 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + q^2) - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \simeq -\frac{\hbar^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{m}$$

$$f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - f_{\mathbf{k}} = f_{\mathbf{k}} - \mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} + \dots - f_{\mathbf{k}} \simeq -\mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}$$

$$f_{\mathbf{k},s} = \frac{1}{e^{\beta(E_{\mathbf{k}} - \mu)} + 1}$$

$$\sum_i q_i \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial k_i} = - \sum_i q_i \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial \mu} \frac{\partial \epsilon_{\mathbf{k}}}{\partial k_i} = - \sum_i q_i k_i \frac{\hbar^2}{m} \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial \mu}$$

$$\longrightarrow \quad \epsilon(\mathbf{q}, 0) = 1 + \frac{4\pi e^2}{\epsilon_0 q^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}$$

$$= 1 + \frac{4\pi e^2}{\epsilon_0 q^2} \frac{\partial n}{\partial \mu} \equiv 1 + \frac{\kappa^2}{q^2}$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{4\pi e^2}{\epsilon_0} \frac{\partial n}{\partial \mu}}$$

3D screening wave number
Longitud inversa de apantallamiento

$$\left. \begin{aligned} \epsilon(q, 0) &= 1 + \frac{\kappa^2}{q^2} \\ \frac{V_q}{\epsilon(q, \omega)} &\equiv V_s(q, \omega) \end{aligned} \right\} \longrightarrow$$

$$V_s(q) = \frac{V_q}{\epsilon(q, 0)} = \frac{4\pi e^2}{\epsilon_0 L^3 q^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{\kappa^2}{q^2}} \right) = \frac{1}{\epsilon_0 L^3} \frac{4\pi e^2}{(q^2 + \kappa^2)}$$

Potencial Coulombiano 3D
apantallado estáticamente

$$V_q = V_q^{3D} = \frac{4\pi e^2}{\epsilon_0 L^3} \frac{1}{q^2} .$$

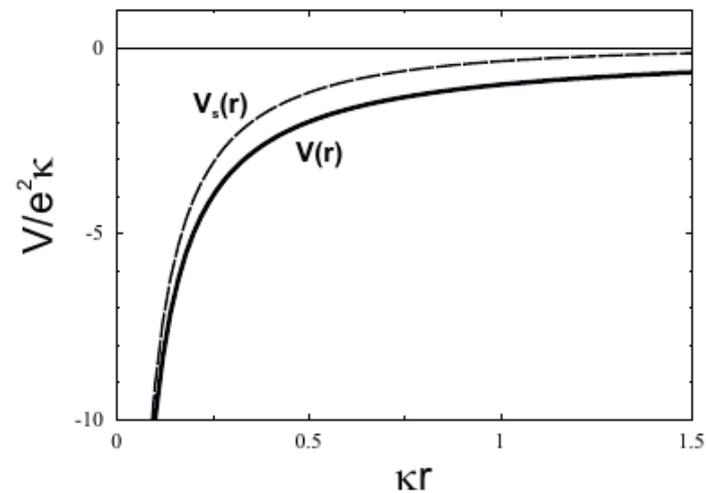
3D Coulomb potential

Notar como el apantallamiento
elimina la singularidad de Coulomb
en $q=0$ (larga longitud de onda)

Tomando transformada de Fourier:

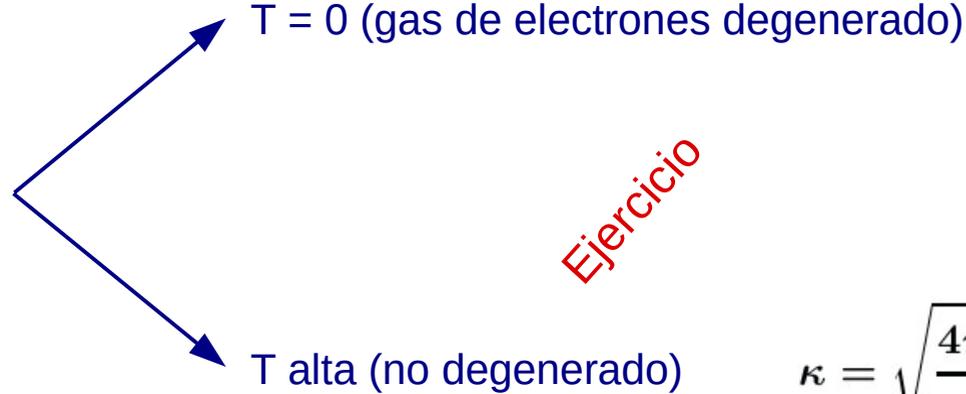
$$V_s(r) = \sum_{\mathbf{q}} \underbrace{\frac{4\pi e^2}{\epsilon_0 L^3 (q^2 + \kappa^2)}}_{V_s(q)} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = \frac{e^2}{\epsilon_0 r} e^{-\kappa r}$$

Potencial de Coulomb apantallado,
potencial de Yukawa



Dependencia de κ con la temperatura

$$\kappa = \sqrt{\frac{4\pi e^2}{\epsilon_0} \frac{\partial n}{\partial \mu}}$$



Ejercicio

$$\kappa = \sqrt{\frac{6\pi e^2 n}{\epsilon_0 E_F}}$$

Thomas-Fermi

$$\kappa = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n \beta}{\epsilon_0}}$$

Debye-Hückel

Fórmula de Lindhard en 2 dimensiones

Repitiendo el análisis anterior en el límite de long wave-length se obtiene:

Ejercicio

$$\epsilon(q \rightarrow 0, \omega) = 1 - \frac{\omega_{pl}^2(q)}{\omega^2} \quad \text{donde:} \quad \omega_{pl}(q) = \sqrt{\frac{2\pi e^2 n}{\epsilon_0 m} q}$$

Frecuencia de plasma 2D

Recordemos que en 3D teníamos: $\omega_{pl}^2 = \frac{4\pi e^2 n}{\epsilon_0 m}$

Aplicamos la expresión obtenida antes para el límite estático:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon(q, 0) &= 1 + V_q \frac{\partial n}{\partial \mu} \\ V_q &= V_q^{2D} = \frac{2\pi e^2}{\epsilon_0 L^2} \frac{1}{q} \end{aligned} \right\} \longrightarrow \epsilon(q, 0) = 1 + \frac{\kappa}{q}$$

Función dieléctrica estática 2D

donde $\kappa = \frac{2\pi e^2}{\epsilon_0} \frac{\partial n}{\partial \mu}$

$$\longrightarrow V_s(q) = \frac{2\pi e^2}{\epsilon_0 L^2} \frac{1}{q + \kappa}$$

Potencial Coulombiano 2D
apantallado estáticamente

Screening wave number: $\kappa = \frac{2\pi e^2}{\epsilon_0} \frac{\partial n}{\partial \mu}$

En 2D: $\beta\mu(n, T) = \ln \left(e^{\hbar^2 \beta \pi n / m} - 1 \right)$ Eq. (6.41)

 $\frac{\partial \mu}{\partial n} = \frac{\hbar^2 \pi}{m} \frac{1}{1 - e^{-\hbar^2 \beta \pi n / m}}$

 $\kappa = \frac{2me^2}{\epsilon_0 \hbar^2} (1 - e^{-\hbar^2 \beta \pi n / m})$

Se verifica que: $1 - e^{-\hbar^2 \beta \pi n / m} = f_{k=0}$

Screening wave number: $\kappa = \frac{2\pi e^2}{\epsilon_0} \frac{\partial n}{\partial \mu}$

En 2D: $\beta\mu(n, T) = \ln \left(e^{\hbar^2 \beta \pi n / m} - 1 \right)$ Eq. (6.41)

 $\frac{\partial \mu}{\partial n} = \frac{\hbar^2 \pi}{m} \frac{1}{1 - e^{-\hbar^2 \beta \pi n / m}}$

 $\kappa = \frac{2me^2}{\epsilon_0 \hbar^2} (1 - e^{-\hbar^2 \beta \pi n / m})$

Se verifica que: $1 - e^{-\hbar^2 \beta \pi n / m} = f_{k=0}$


$$\kappa = \frac{2me^2}{\epsilon_0 \hbar^2} f_{k=0} . \quad (8.77)$$

2D screening wave number

This expression is correct for all densities and temperatures. It is interesting to note that the screening wave number in **2D** becomes independent of the density for low temperature and high densities, whereas the corresponding **3D** result always remains density-dependent.

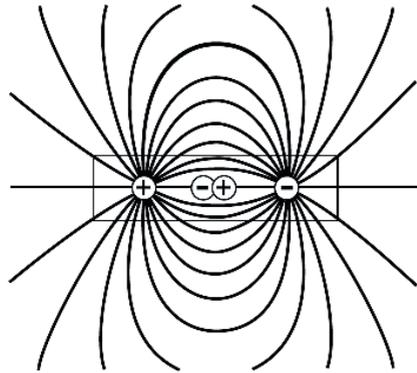
En 3D teníamos:

$$\kappa = \sqrt{\frac{6\pi e^2 n}{\epsilon_0 E_F}}$$

Thomas-Fermi

Apantallamiento versus dimensionalidad

Dónde apantalla mejor el gas de electrones: en 3D, 2D, o 1D?



En las estructuras semiconductoras, las líneas de campo eléctrico pueden entrar y salir de la zona donde están los electrones, aunque haya un leve cambio de constante dieléctrica.

En 3D los electrones pueden rodar completamente una carga, pero en 2D y 1D esto se vuelve más limitado, especialmente en 1D.

Por eso el apantallamiento se vuelve más ineficaz en baja dimensión.

Resumen de la clase 17

Análisis de la fórmula de Lindhard

Límites de larga longitud de onda y estático

3D y 2D

Longitud de screening estático

Potencial Coulombiano apantallado o de Yukawa