

La clase pasada vimos:

Apantallamiento (screening) del plasma

Límites de larga longitud de onda y estático

3D y 2D

Longitud de screening estático

Potencial Coulombiano apantallado o de Yukawa

En esta clase veremos:

Modelo dieléctrico de osciladores

Polarización eléctrica

Susceptibilidad óptica

Relación de Kramers-Kronig

REPASO

Long wavelength

$$V_{eff}(q) = \frac{V_q}{1 - V_q P^1(q, \omega)} = \frac{V_q}{\epsilon(q, \omega)} \equiv V_s(q, \omega)$$

En 3D teníamos:

$$q \rightarrow 0, \omega_{q \rightarrow 0} = \omega_{pl}; \quad \epsilon(0, \omega) = 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2} \quad \omega_{pl}^2 = \frac{4\pi e^2 n}{\epsilon_0 m}$$

En 2D:

$$\epsilon(q \rightarrow 0, \omega) = 1 - \frac{\omega_{pl}^2(q)}{\omega^2} \quad \text{donde:} \quad \omega_{pl}(q) = \sqrt{\frac{2\pi e^2 n}{\epsilon_0 m} q}$$

Frecuencia de plasma 2D

If we do the same analysis in 2D we obtain a different plasma dispersion. We quote here the result which is (q = electron charge)

$$\text{Eq. (11.47) } \omega_{p,2D}(k_p) = \sqrt{\frac{q^2 n_{2D} k_p}{2\epsilon_0 \epsilon_b m}}$$

We note that the zero wavevector value of the 2D plasmon dispersion is zero in contrast to the 3D result. **Plasmon modes** are very much geometry and system size dependent. The general plasmon dispersion relation can be obtained from the requirement that there be longitudinal mode solutions in the Maxwell equations and thus that the wavevector and frequency dependent permittivity be Eq. (11.48) $\epsilon(\vec{k}, \omega) = 0$

$\omega + i\delta \rightarrow 0$ Límite estático

REPASO

$$V_s(r) = \sum_{\mathbf{q}} \underbrace{\frac{4\pi e^2}{\epsilon_0 L^3 (q^2 + \kappa^2)}}_{V_s(q)} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = \frac{e^2}{\epsilon_0 r} e^{-\kappa r}$$

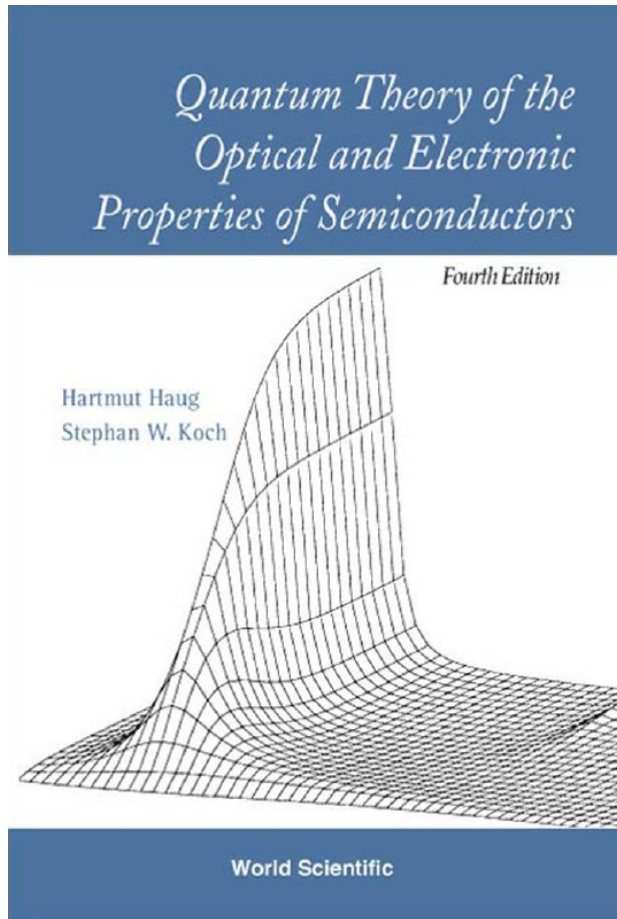
Potencial de Coulomb apantallado,
potencial de Yukawa

Función dieléctrica estática 2D

$$\epsilon(q, 0) = 1 + \frac{\kappa}{q}$$

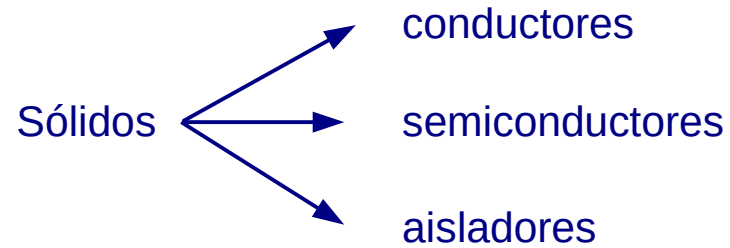
donde $\kappa = \frac{2\pi e^2}{\epsilon_0} \frac{\partial n}{\partial \mu}$

Susceptibilidad óptica

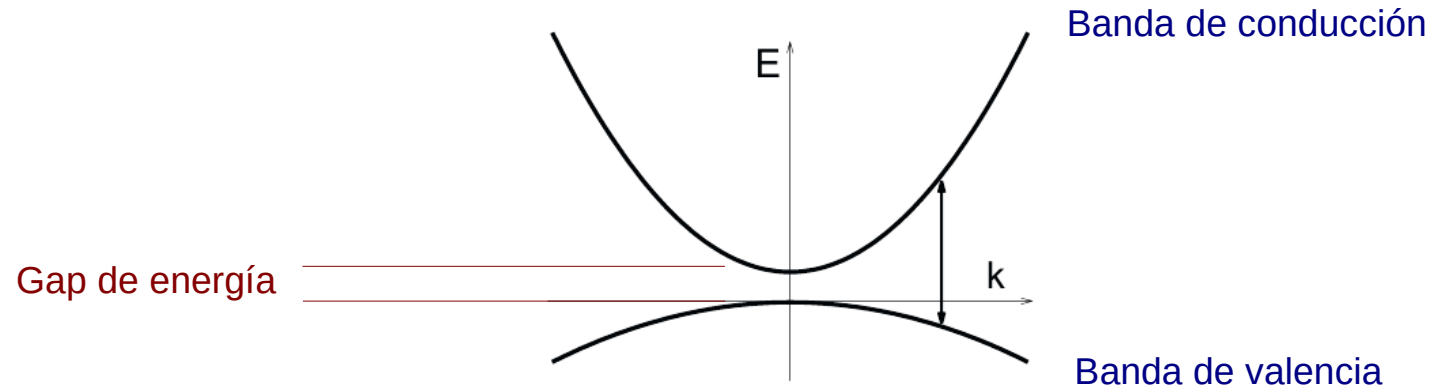


1. Oscillator Model	1
1.1 Optical Susceptibility	2
1.2 Absorption and Refraction	6
1.3 Retarded Green's Function	12

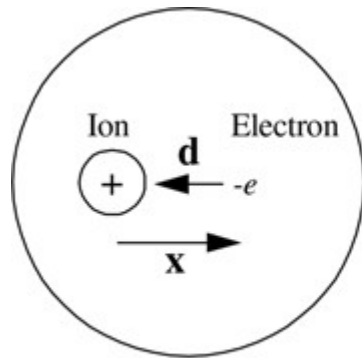
Susceptibilidad óptica



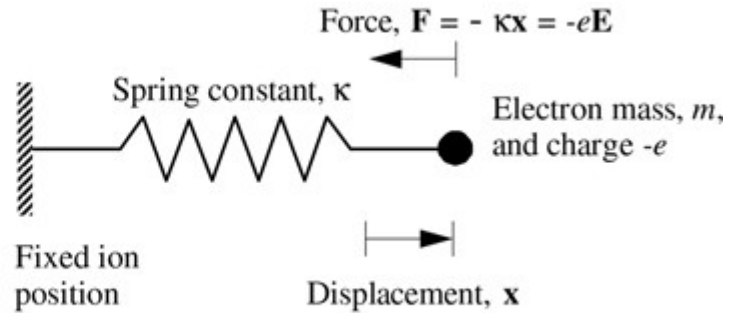
Semiconductores: modelo simple de dos bandas



Oscillator model



(a)



(b)

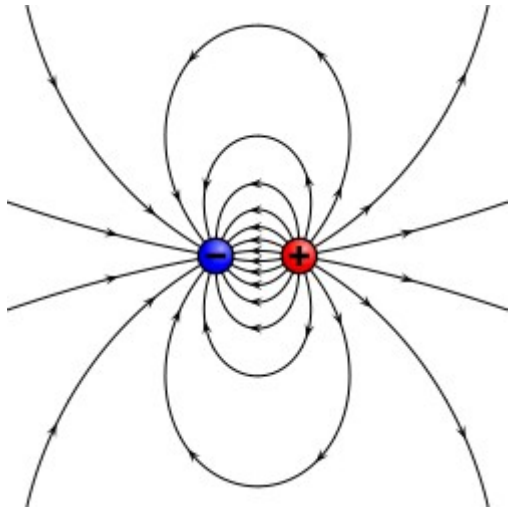
Modelo del oscilador de Lorentz, Planck y Einstein

Es un modelo clásico para estudiar la interacción luz-materia:

- Susceptibilidad óptica
- Función dieléctrica
- Absorción y refracción
- Definir funciones de Green

Susceptibilidad óptica

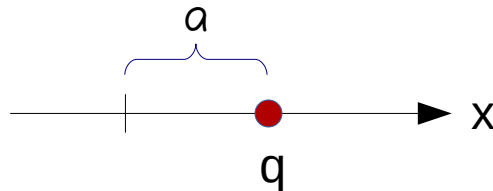
Momento dipolar de una distribución de carga: $\mathbf{P} = \int d^3r \mathbf{r} \rho(\mathbf{r})$



Para un dipolo con cargas q y $-q$ a una distancia "a" :

$$\mathbf{P} = \frac{a}{2} q \hat{\mathbf{x}} - \frac{a}{2} (-q) \hat{\mathbf{x}} = aq \hat{\mathbf{x}}$$

Para una carga q en la posición "a" :



$$\mathbf{P} = aq \hat{\mathbf{x}}$$

Susceptibilidad óptica

Se aplica un campo eléctrico en la dirección x

$$e \simeq -1.6 \cdot 10^{-16} \text{ C}$$

$$\mathcal{P} = \frac{P}{L^3} = n_0ex = n_0d$$

polarización

momento dipolar por unidad de volumen

momento dipolar eléctrico

Susceptibilidad óptica

Se aplica un campo eléctrico $\mathcal{E}(t)$ en la dirección x

Modelamos con oscilador armónico amortiguado:

$$e \simeq -1.6 \cdot 10^{-16} \text{ C}$$

$$m_0 \frac{d^2 x}{dt^2} = -2m_0 \gamma \frac{dx}{dt} - m_0 \omega_0^2 x + e \mathcal{E}(t)$$


↑ ↑
constante de frecuencia del
amortiguamiento oscilador


Susceptibilidad óptica

Se aplica un campo eléctrico $\mathcal{E}(t)$ en la dirección x

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(\omega)e^{-i\omega t}$$

Se propone: $x(t) = x(\omega)e^{-i\omega t}$

$$m_0 \frac{d^2 x}{dt^2} = -2m_0\gamma \frac{dx}{dt} - m_0\omega_0^2 x + e\mathcal{E}(t)$$



$$m_0(\omega^2 + i2\gamma\omega - \omega_0^2)x(\omega) = -e\mathcal{E}(\omega)$$

Susceptibilidad óptica


$$\left. \begin{aligned} m_0(\omega^2 + i2\gamma\omega - \omega_0^2)x(\omega) &= -e\mathcal{E}(\omega) \\ \mathcal{P} &= \frac{P}{L^3} = n_0ex = n_0d \end{aligned} \right\} \longrightarrow$$

$$\mathcal{P}(\omega) = \underbrace{-\frac{n_0e^2}{m_0} \frac{1}{\omega^2 + i2\gamma\omega - \omega_0^2}}_{\chi(\omega)} \mathcal{E}(\omega)$$

susceptibilidad óptica

$$\mathcal{P}(\omega) = \chi(\omega)\mathcal{E}(\omega)$$

Susceptibilidad óptica

$$\mathcal{P}(\omega) = -\frac{n_0 e^2}{m_0} \frac{1}{\omega^2 + i2\gamma\omega - \omega_0^2} \mathcal{E}(\omega)$$
$$\mathcal{P}(\omega) = \chi(\omega) \mathcal{E}(\omega)$$


$$\chi(\omega) = -\frac{n_0 e^2}{2m_0 \omega'_0} \left(\frac{1}{\omega - \omega'_0 + i\gamma} - \frac{1}{\omega + \omega'_0 + i\gamma} \right)$$

Susceptibilidad óptica
(en general es un tensor)

Donde: $\omega'_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

Frecuencia de resonancia
renormalizada por el amortiguamiento

Susceptibilidad óptica

$$\chi(\omega) = -\frac{n_0 e^2}{2m_0 \omega'_0} \left(\frac{1}{\omega - \omega'_0 + i\gamma} - \frac{1}{\omega + \omega'_0 + i\gamma} \right)$$

Susceptibilidad óptica

Notar los polos en: $\omega = -i\gamma \pm \omega'_0$

Están en el semiplano complejo inferior: causalidad

$$\omega = \omega' + i\omega''$$

Frecuencias complejas

En el dominio temporal, la relación más general es:

$$\mathcal{P}(t) = \int_{-\infty}^t dt' \chi(t, t') \mathcal{E}(t')$$

← Tiene la “memoria” del sistema para campos aplicados en tiempos t' anteriores a t

Da capo, empecemos de nuevo

Susceptibilidad óptica

En el dominio temporal, un modelo más general es:

$$\mathcal{P}(t) = \int_{-\infty}^t dt' \chi(t, t') \mathcal{E}(t')$$

Tiene la “memoria” del sistema para campos aplicados en tiempos t' anteriores a t

Susceptibilidad óptica

En el dominio temporal, la relación más general es:

$$\mathcal{P}(t) = \int_{-\infty}^t dt' \chi(t, t') \mathcal{E}(t')$$

Cambio de variables: $T = \frac{t + t'}{2}$ $\tau = t - t'$

En equilibrio $\chi(T, \tau)$ no depende de T

$$\mathcal{P}(t) = \int_{-\infty}^t dt' \chi(t - t') \mathcal{E}(t') = \int_0^{\infty} d\tau \chi(\tau) \mathcal{E}(t - \tau)$$

Susceptibilidad óptica

$$\mathcal{P}(t) = \int_{-\infty}^t dt' \chi(t-t') \mathcal{E}(t') = \int_0^{\infty} d\tau \chi(\tau) \mathcal{E}(t-\tau)$$

multiplicamos por $e^{i\omega t}$ e integramos sobre t

$$\mathcal{P}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \int_0^{\infty} d\tau \chi(\tau) \mathcal{E}(t-\tau)$$

$$\mathcal{P}(\omega) = \int_0^{\infty} d\tau \chi(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \mathcal{E}(t-\tau)$$

$$\mathcal{P}(\omega) = \int_0^{\infty} d\tau \chi(\tau) e^{i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega(t-\tau)} \mathcal{E}(t-\tau)$$

Susceptibilidad óptica

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\omega) &= \int_0^{\infty} d\tau \chi(\tau) e^{i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega(t-\tau)} \mathcal{E}(t-\tau) \\ &= \chi(\omega) \mathcal{E}(\omega)\end{aligned}$$

Como habíamos obtenido antes

donde: $\chi(\omega) = \int_0^{\infty} d\tau \chi(\tau) e^{i\omega\tau}$

Vemos que la convolución en el dominio tiempo se convierte en un producto en el dominio frecuencia.

Transformada de Fourier

$$\begin{aligned}f(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{i\omega t} \\ f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} f(\omega) e^{-i\omega t}\end{aligned}$$

Análisis de la susceptibilidad óptica
Relación de Kramers-Kronig

Acá todas las cantidades son reales: $\mathcal{P}(t) = \int_0^{\infty} d\tau \chi(\tau) \mathcal{E}(t - \tau)$

$$\chi(\omega) = \int_0^{\infty} d\tau \chi(\tau) e^{i\omega\tau} \longrightarrow \chi^*(\omega) = \chi(-\omega) \begin{cases} \chi'(\omega) = \chi'(-\omega) & \text{Parte real} \\ \chi''(\omega) = -\chi''(-\omega) & \text{Parte imaginaria} \end{cases}$$

Como $\chi(\omega)$ es analítica en el eje real, se puede aplicar la:

$$\chi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu}{2\pi i} \frac{\chi(\nu)}{\nu - \omega - i\delta} \quad \text{Relación de Cauchy}$$


$$\chi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu}{2\pi i} \frac{\chi(\nu)}{\nu - \omega - i\delta}$$

Relación de Cauchy

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\omega - i\delta} = P \frac{1}{\omega} + i\pi\delta(\omega)$$

Identidad de Dirac

$$\chi(\omega) = P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu}{2\pi i} \frac{\chi(\nu)}{\nu - \omega} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu \chi(\nu) \delta(\nu - \omega)$$




$$\left\{ \begin{array}{l} \chi'(\omega) = P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu}{\pi} \frac{\chi''(\nu)}{\nu - \omega} \\ \chi''(\omega) = -P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu}{\pi} \frac{\chi'(\nu)}{\nu - \omega} \end{array} \right.$$

Susceptibilidad óptica

Separamos la integral en dos partes:

$$\chi'(\omega) = P \int_{-\infty}^0 \frac{d\nu \chi''(\nu)}{\pi \nu - \omega} + P \int_0^{+\infty} \frac{d\nu \chi''(\nu)}{\pi \nu - \omega}$$

Usando que $\chi''(\omega) = -\chi''(-\omega)$


$$\chi'(\omega) = P \int_0^{+\infty} \frac{d\nu \chi''(\nu)}{\pi} \left(\frac{1}{\nu + \omega} + \frac{1}{\nu - \omega} \right)$$

$$\chi'(\omega) = P \int_0^{+\infty} \frac{d\nu \chi''(\nu)}{\pi} \frac{2\nu}{\nu^2 - \omega^2}$$

Kramers–Kronig relation

WIKIPEDIA

Kramers–Kronig relations

The **Kramers–Kronig relations** are bidirectional mathematical relations, connecting the real and imaginary parts of any complex function that is analytic in the upper half-plane. The relations are often used to compute the real part from the imaginary part (or vice versa) of response functions in physical systems, because for stable systems, causality implies the condition of analyticity, and conversely, analyticity implies causality of the corresponding stable physical system.^[1] The relation is named in honor of Ralph Kronig and Hans Kramers.^{[2][3]} In mathematics, these relations are known by the names Sokhotski–Plemelj theorem and Hilbert transform.

Resumen de la clase 18

Modelo dieléctrico de osciladores

Polarización eléctrica

Susceptibilidad óptica

Relación de Kramers-Kronig