CLASE 19 - Martes 08/06/2021

La clase pasada vimos:

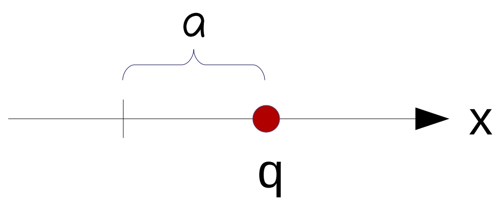
- Modelo dieléctrico de osciladores
- Polarización eléctrica
- Susceptibilidad óptica
- Relación de Kramers-Kronig

En esta clase veremos:

- Modelo de osciladores:
  - Función dieléctrica óptica
  - Interpretación física: absorción y refracción

REPASO

Para una carga q en la posición "*a*" :



$$\mathbf{P} = aq\,\hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathcal{P} = \frac{P}{L^3} = n_0 ex = n_0 d$$

polarización

momento dipolar
por unidad de volumen

momento dipolar eléctrico

$$m_0 \frac{d^2 x}{dt^2} = -2m_0\gamma \frac{dx}{dt} - m_0\omega_0^2 x + e\mathcal{E}(t)$$

constante de
amortiguamiento

frecuencia del
oscilador

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(\omega)e^{-i\omega t}$$

$$x(t) = x(\omega)e^{-i\omega t}$$

$\Rightarrow$

$$\mathcal{P}(\omega) = \chi(\omega)\mathcal{E}(\omega)$$

REPASO

$\Rightarrow$

$$\mathcal{P}(\omega) = \underbrace{-\frac{n_0 e^2}{m_0}\frac{1}{\omega^2 + i2\gamma\omega - \omega_0^2}}_{\chi(\omega)}\mathcal{E}(\omega)$$

susceptibilidad óptica

$$\boldsymbol{\chi(\omega) = -\frac{n_0 e^2}{2m_0\omega_0'}\left(\frac{1}{\omega - \omega_0' + i\gamma} - \frac{1}{\omega + \omega_0' + i\gamma}\right)}$$

$$\omega_0' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

REPASO

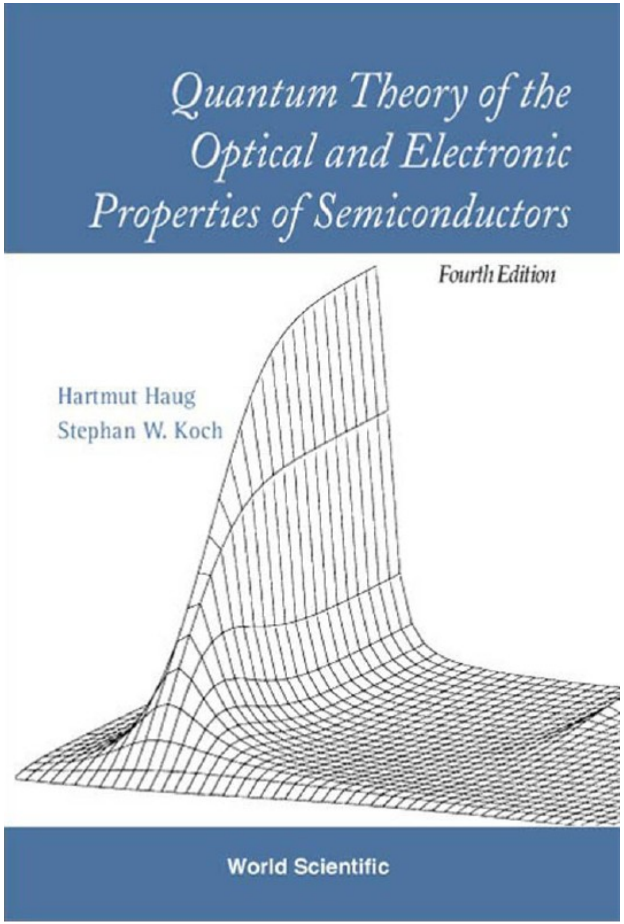
$$\mathcal{P}(t) = \int_{-\infty}^{t} dt'\chi(t,t')\mathcal{E}(t')$$

$$\mathcal{P}(t) = \int_{-\infty}^{t} dt'\chi(t-t')\mathcal{E}(t') = \int_{0}^{\infty} d\tau\chi(\tau)\mathcal{E}(t-\tau)$$

$$\chi'(\omega) = P\int_{0}^{+\infty} \frac{d\nu}{\pi}\chi''(\nu)\frac{2\nu}{\nu^2-\omega^2}$$

Kramers–Kronig relation

Susceptibilidad óptica



Función dieléctrica óptica

$$D(\omega) = \mathcal{E}(\omega) + 4\pi\mathcal{P}(\omega) = [1 + 4\pi\chi(\omega)]\mathcal{E}(\omega) = \epsilon(\omega)\mathcal{E}(\omega)$$

Campo desplazamiento

Campo eléctrico

(en cgs)

Teníamos:

$$\chi(\omega) = -\frac{n_0 e^2}{2m_0\omega_0'}\left(\frac{1}{\omega - \omega_0' + i\gamma} - \frac{1}{\omega + \omega_0' + i\gamma}\right) \qquad \omega_0' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

optical susceptibility

$$\boxed{\epsilon(\omega) = 1 + 4\pi\chi(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{2\omega_0'}\left(\frac{1}{\omega - \omega_0' + i\gamma} - \frac{1}{\omega + \omega_0' + i\gamma}\right)}$$

$$\omega_{pl} = \sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2}{m_0}}$$

Función dieléctrica óptica

$D(\omega) = \epsilon(\omega)\mathcal{E}(\omega)$

$$\boldsymbol{\epsilon(\omega) = 1 + 4\pi\chi(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{2\omega_0'}\left(\frac{1}{\omega - \omega_0' + i\gamma} - \frac{1}{\omega + \omega_0' + i\gamma}\right)}$$

Tenemos polos en $\omega = \pm\omega_0' - i\gamma$

Si se aplica luz con frecuencia $\approx \omega_0$ podemos despreciar el segundo término:

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{2\omega_0}\frac{1}{\omega - \omega_0 + i\gamma}$$

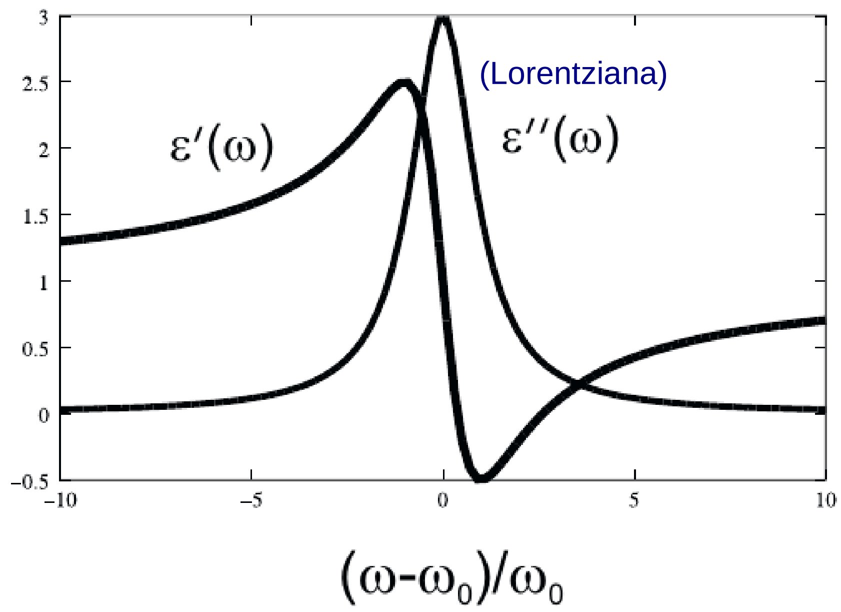
Donde además supusimos que: $\omega_0 >> \gamma$ $\omega_0 \simeq \omega_0'$

Función dieléctrica óptica

$D(\omega) = \epsilon(\omega)\mathcal{E}(\omega)$

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{2\omega_0}\frac{1}{\omega - \omega_0 + i\gamma}$$

$$\begin{cases} \epsilon'(\omega) - 1 = -\dfrac{\omega_{pl}^2}{2\omega_0}\dfrac{\omega - \omega_0}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \\ \epsilon''(\omega) = \dfrac{\omega_{pl}^2}{4\omega_0}\dfrac{2\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \end{cases}$$



$\gamma/\omega_0 = 0.1$

$\epsilon''_{max} = \omega_{pl}^2/2\gamma\omega_o$

Interpretación física: Absorción y refracción

Función dieléctrica óptica

$D(\omega) = \epsilon(\omega)\mathcal{E}(\omega)$

Interpretación física

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{curl}\mathbf{H}(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}(\mathbf{r},t) \\
\operatorname{curl}\mathcal{E}(\mathbf{r},t) &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) \\
\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{H}(\mathbf{r},t)
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Válido a frecuencias ópticas

$$\Rightarrow \operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathcal{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{curl}\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$$

Interpretación física

$$\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\,\mathcal{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{curl}\,\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$$

$$\mathrm{curl}\ \mathrm{curl}\ = \mathrm{grad}\,\mathrm{div} - \Delta \qquad\qquad \Delta \ \equiv\ \nabla^2$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\mathcal{E}(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = 0$$

Haciendo la transformada de Fourier en el tiempo:

$$\Delta\mathcal{E}(\mathbf{r},\omega) + \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon'(\omega)\mathcal{E}(\mathbf{r},\omega) + i\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon''(\omega)\mathcal{E}(\mathbf{r},\omega) = 0$$

Función dieléctrica óptica
$D(\omega) = \epsilon(\omega)\mathcal{E}(\omega)$

Interpretación física

Para ver lo que le pasa a una onda de campo eléctrico propagándose en este medio, escribimos:

$$\boxed{\mathcal{E}(\mathbf{r}, \omega) = \mathcal{E}_0(\omega) e^{i[k(\omega)+i\kappa(\omega)]z}}$$

$$\Delta\mathcal{E}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon'(\omega)\mathcal{E}(\mathbf{r}, \omega) + i\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon''(\omega)\mathcal{E}(\mathbf{r}, \omega) = 0$$

$$\Rightarrow \quad [k(\omega) + i\kappa(\omega)]^2 = \frac{\omega^2}{c^2}[\epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)]$$

Interpretación física

$$[k(\omega) + i\kappa(\omega)]^2 = \frac{\omega^2}{c^2}[\epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)]$$

Separando partes real e imaginaria:

$$k^2(\omega) - \kappa^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon'(\omega) \qquad 2\kappa(\omega)k(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon''(\omega)$$

Introducimos el índice de refracción: $n(\omega) = \frac{k(\omega)}{k_0} = \frac{k(\omega)}{\omega/c} = c\,\frac{k(\omega)}{\omega}$

$$\Rightarrow \quad k(\omega) = n(\omega)\frac{\omega}{c}$$

Coeficiente de absorción: $\alpha(\omega) = 2\kappa(\omega)$

Interpretación física

Coeficiente de absorción: $\alpha(\omega) = 2\kappa(\omega)$

Decaimiento de la intensidad: $I \propto |\mathcal{E}|^2$

Longitud típica de decaimiento: $1/\alpha$

$$\left.\begin{aligned} k^2(\omega) - \kappa^2(\omega) &= \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon'(\omega) \\ 2\kappa(\omega)k(\omega) &= \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon''(\omega) \\ k(\omega) &= n(\omega)\frac{\omega}{c} \\ \alpha(\omega) &= 2\kappa(\omega) \end{aligned}\right\}$$

$$\boldsymbol{n(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\epsilon'(\omega) + \sqrt{\epsilon'^2(\omega) + \epsilon''^2(\omega)}\right]}}$$

Indice de refracción

$$\boldsymbol{\alpha(\omega) = \frac{\omega}{n(\omega)c}\epsilon''(\omega)}$$

Coeficiente de absorción

Función dieléctrica óptica

$D(\omega) = \epsilon(\omega)\mathcal{E}(\omega)$

Interpretación física

$$n(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\epsilon'(\omega) + \sqrt{\epsilon'^2(\omega) + \epsilon''^2(\omega)}\right]}$$

Indice de refracción

si $\epsilon''(\omega) << \epsilon'(\omega)$

$$n(\omega) \simeq \sqrt{\epsilon'(\omega)}$$

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega}{n(\omega)c}\epsilon''(\omega)$$

Coeficiente de absorción

$$n(\omega) \simeq n_b$$

$$\alpha(\omega) \simeq \frac{\omega}{n_b c}\epsilon''(\omega) = \frac{4\pi\omega}{n_b c}\chi''(\omega)$$

Función dieléctrica óptica

$D(\omega) = \epsilon(\omega)\mathcal{E}(\omega)$

Interpretación física

Caso sin amortiguamiento: $\boxed{\gamma \longrightarrow 0}$

$$\lim_{\gamma \to 0} \frac{2\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} = 2\pi\delta\left(\omega - \omega_0\right) \quad \Rightarrow \quad \epsilon''(\omega) = \pi \frac{\omega_{pl}^2}{2\omega_0}\delta(\omega - \omega_0)$$

Parte real: $\epsilon'(\omega) = 1 - \dfrac{\omega_{pl}^2}{2\omega_0}\dfrac{1}{\omega - \omega_0}$

Queda una resonancia con cero ancho de línea.

Resumen de la clase 19

Modelo de osciladores:

- Función dieléctrica óptica
- Interpretación física: absorción y refracción