① Para un gas de e^- en 2D y 1D, calcular:

ⓐ $n(K_F)$; ⓑ v_F y E_F en función de r_s y r_s/a_0

ⓒ La energía total en función de K_F, T_F, E_F y r_s/a_0.

ⓐ Hay muchas formas de calcular $n = \frac{N}{V_D}$; una es determinar N contando los estados ocupados por los e^- $\left(E = \frac{K^2}{2m_e} \leq E_F \; ; \; T = 0K \right)$

2D

$$N = \sum_{\sigma,\vec{K}} 1 \stackrel{\Delta K = (2\pi)^2/S}{=} 2 \sum_{\vec{K}} \frac{\Delta K}{\Delta K}$$

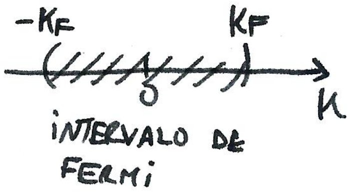
$$N \approx \frac{2}{(2\pi)^2/S} \int d\vec{K} = \frac{4\pi}{(2\pi)^2/S} \int_0^{K_F} K\,dK$$

$$\underbrace{\frac{N}{S}}_{n} = \frac{1}{\pi} \frac{K_F^2}{2} \Rightarrow \boxed{n = \frac{K_F^2}{2\pi}}$$

1D

$$N = 2 \sum_{\vec{K}} 1 \approx \frac{2}{2\pi/L} \int_{-K_F}^{K_F} d\vec{K} = \frac{2}{\pi} K_F L$$

$$\Rightarrow \frac{N}{L} = \boxed{n = \frac{2}{\pi} K_F}$$



Otra forma más rápida:

$$N = \underbrace{2}_{\text{espín}} \frac{\overbrace{2K_F}^{\text{VOLUMEN DEL INTERVALO DE FERMI}}}{\underbrace{\Delta K}_{\text{VOLUMEN DE UN ESTADO PERMITIDO}}} \rightarrow n^o \text{ de } e^- = n^o \text{ de estados ocupados}$$

Sabemos que el n permite introducir la distancia media entre e, i.e r_s:

2D

$$n = \frac{N}{S} \rightarrow \frac{1}{n} = \frac{S}{N} \equiv \underset{\uparrow}{v} \equiv \pi r_s^2$$

superficie por partícula

$$\Rightarrow r_s^2 = \frac{1}{n\pi} = \frac{2}{K_F^2}$$

$a_0 = 0{,}529\ \text{Å}$ radio de Bohr.

$$\Rightarrow \boxed{K_F = \frac{\sqrt{2}}{r_s} = \frac{1{,}41}{r_s} = \frac{2{,}67}{(r_s/a_0)}\ \text{Å}^{-1}}$$

1D

$$\frac{1}{n} = \frac{L}{N} \equiv 2r_s$$

En realidad debería ir un 2 acá. Falta en todas las expresiones siguientes:

$$\Rightarrow r_s = \frac{1}{n} = \frac{\pi}{2K_F}$$

$$\Rightarrow \boxed{K_F = \frac{1{,}57}{r_s} = \frac{2{,}96}{(r_s/a_0)}\ \text{Å}^{-1}}$$

(b) Empecemos calculando la energía de Fermi, E_F:

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m_e} K_F^2 = \boxed{\left(\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{2}{r_s^2}\right)} \quad a_0 = \hbar^2/m_e e^2$$

$$E_F = \frac{e^2 a_0}{2} K_F^2 = \underbrace{\frac{e^2}{2a_0}} (K_F a_0)^2$$

constante de Rydberg $\quad R_Y = 13{,}6\ \text{eV}$

$$\boxed{E_F = \frac{R_Y \cdot 2}{(r_s/a_0)^2} = \frac{27{,}04\ \text{eV}}{(r_s/a_0)^2}}$$

Por otro lado:

$$v_F = \frac{p_F}{m_e} = \frac{\hbar K_F}{m_e} = \frac{\hbar}{m_e}\frac{\sqrt{2}}{r_s}$$

$$v_F = \left(\frac{\hbar}{a_0 m_e}\right)\frac{\sqrt{2}}{(r_s/a_0)} = \boxed{\frac{3{,}08 \cdot}{(r_s/a_0)} 10^8 \frac{\text{cm}}{s}}$$

$2{,}18 \frac{\text{cm}}{s} \cdot 10^8$

De manera análoga:

$$\boxed{E_F = \frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{2{,}46}{r_s^2}}$$

$$E_F = R_Y (K_F a_0)^2$$

$$\boxed{E_F = \frac{33{,}52\ \text{eV}}{(r_s/a_0)^2}}$$

$$v_F = \frac{\hbar}{a_0 m_e}\frac{1{,}57}{(r_s/a_0)} = \boxed{\frac{3{,}42}{(r_s/a_0)} \cdot 10^8 \frac{\text{cm}}{s}}$$

Notar que como $r_s \sim a_0$, ¿entonces $v_F \sim c$? ¡No! Pero es alta

(c) La energía interna está dada por:

$$U = \sum_{0,\vec{K}/|\vec{K}|<K_F} \frac{\hbar^2}{2m} K^2 = \frac{\hbar^2}{m}\sum_{\vec{K}} K^2 \frac{\Delta K}{\Delta K} = \frac{\hbar^2}{m\Delta K}\int K^2 \overbrace{d\vec{K}}$$

$$\begin{cases} K\, d\phi\, dK \\ 2\, dK \end{cases}$$

$$U = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{S}{2\pi^2} 2\pi \frac{K_F^4}{4}$$

$$U = \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m} K_F^2}_{E_F} \underbrace{\frac{S}{\pi}\frac{K_F^2}{2}}_{N} \frac{1}{2}$$

$$U = \frac{\hbar^2}{m}\frac{L}{2\pi} 2 \frac{K_F^3}{3}$$

$$U = \underbrace{\left(\frac{\hbar^2 K_F^2}{2m}\right)}_{E_F} \underbrace{\frac{2L}{\pi} K_F}_{N} \cdot \frac{1}{3} = \frac{N E_F}{3}$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2} N E_F}$$

La temperatura de Fermi está definida por: $T_F \equiv E_F / k_B$

$$\Rightarrow \boxed{U = \frac{1}{2} N k_B T_F}$$

Usando resultados anteriores:

$$\boxed{U = \frac{1}{2} N \frac{27{,}04\ eV}{(r_s/a_0)^2}}$$

$$\boxed{U = \frac{1}{3} N E_F}$$

$$\boxed{U = \frac{1}{3} N k_B T_F}$$

$$\boxed{U = \frac{1}{3} N \frac{33{,}52\ eV}{(r_s/a_0)^2}}$$