

# Fenómenos colectivos en sólidos

DF-FCEN-UBA, Primer Cuatrimestre 2021

## Guía 3: Formalismo de segunda cuantización

1. Demostrar las reglas de anticonmutación que satisfacen los operadores de creación y destrucción de fermiones

$$\{a_i, a_j\} = 0 \quad \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = 0 \quad \{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij}$$

2. A partir de las reglas de anticonmutación, demostrar las siguientes identidades para los conmutadores de los operadores fermiónicos:

$$[a_i, a_j] = 2 a_i a_j$$

$$[a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 2 a_i^\dagger a_j^\dagger$$

$$[a_i, a_j^\dagger] = 2 a_i a_j^\dagger - \delta_{ij}$$

3. Demostrar que para operadores fermiónicos se satisface:

$$[a_i^\dagger a_j, a_k^\dagger a_l] = \delta_{jk} a_i^\dagger a_l - \delta_{il} a_k^\dagger a_j$$

4. Demostrar para operadores fermiónicos:

$$[a_i^\dagger a_j, a_k^\dagger a_l^\dagger a_m a_n] = \delta_{im} a_k^\dagger a_l^\dagger a_n a_j + \delta_{jk} a_i^\dagger a_l^\dagger a_m a_n - \delta_{in} a_k^\dagger a_l^\dagger a_m a_j - \delta_{jl} a_i^\dagger a_k^\dagger a_m a_n$$

5. (a) Escribir en segunda cuantización el Hamiltoniano de un gas de electrones quasi-bidimensional, cuyo Hamiltoniano en primera cuantización es:

$$H^{(1)} = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} + \sum_{i=1}^N u(z_i) \quad (1)$$

Sugerencia: Utilizar como base de partícula única los estados:

$$\psi_{n\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{r}, s) = \frac{1}{L} e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}} \varphi_n(z) \chi_\sigma(s) \quad (2)$$

donde  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ ,  $\boldsymbol{\rho} = (x, y)$  y  $\varphi_n(z)$  satisfice:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} + u(z) \right] \varphi_n(z) = \varepsilon_n \varphi_n(z) \quad (3)$$

Ayuda:

$$\int d^2\rho \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}}}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} = \int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\rho e^{iq\rho \cos \phi}}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} \quad (4)$$

$$= 2\pi \int_0^\infty d\rho \frac{\rho J_0(q\rho)}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} = \frac{2\pi}{q} e^{-q|z - z'|} \quad (5)$$

(b) Escribir en segunda cuantización el Hamiltoniano para el jellium model en dos dimensiones (obtener una expresión equivalente a la Ec. (3.19) de Fetter-Walecka).

6. Partiendo del Hamiltoniano obtenido en el problema 2(b) para el jellium model en dos dimensiones, continúe el análisis en forma análoga al realizado a partir de la Ec. (3.19) en el libro de Fetter y Walecka. El estudio consta de 4 pasos:

(a) Adimensionalizar el Hamiltoniano y hacer un análisis como el que sigue a la Ec. (3.24).

(b) Calcular el vector de Fermi como en (3.27) y la energía cinética como en (3.30).

(c) Calcular el shift de energía a primer orden debido a la interacción Coulombiana, análogo a la Ec. (3.36).

(d) Juntar los dos términos de la energía obtenidos [como en (3.37)] y graficar como en la Fig. 3.2.