Enunciado del ejercicio

5. (a) Escribir en segunda cuantización el Hamiltoniano de un gas de electrones quasi-bidimensional, cuyo Hamiltoniano en primera cuantización es:

$$H^{(1)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} + \sum_{i=1}^{N} u(z_i) \tag{1}$$

Sugerencia: Utilizar como base de partícula única los estados:

$$\psi_{n\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{r}, s) = \frac{1}{L} e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}} \varphi_n(z)\chi_\sigma(s) \tag{2}$$

donde $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$, $\boldsymbol{\rho} = (x, y)$ y $\varphi_n(z)$ satisface:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dz^2} + u(z)\right]\varphi_n(z) = \varepsilon_n \varphi_n(z) \tag{3}$$

El hamiltoniano se puede pensar como suma de dos hamiltonianos:

$$H^{(1)} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 \tag{1}$$

donde

$$\hat{H}_{el} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + u(z_i)\,() \tag{2}$$

$$\hat{H_{pot}} = \frac{e^2}{2}\sum_{i\neq j}\frac{1}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|} \tag{3}$$

El operador $H^{(1)}$ opera sobre las N partículas mientras que los operadores dentro de las sumas son operadores de partícula única y de dos partículas. En segunda cuantización, y omitiendo los simbolos de operador de aqui en adelante, se puede escribir que:

$$H^{(1)} = \sum_{i,j}^{N} < i|\hat{H}_{el} + \hat{H_{pot}}|j > a_{ij}^\dagger a_{ij} = \sum_{i,j}^{N} < i|\hat{H}_{el}|j > a_{ij}^\dagger a_{ij} + \sum_{i,j,k,l}^{N} < i;j|\hat{H_{pot}}|k,l > a_i^\dagger a_j^\dagger a_l a_k \tag{4}$$

La base de partículas únicas que se pide utlilizar tiene en cuenta el concepto de subbandas, consecuencia del confinamiento bidimensional. La ecuación que satisfacen los estados confinados es la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo en una dimensión. Asimismo, las funciones de spin χ_σ son autoestados del operador S_z con autovalor $\pm\frac{\hbar}{2}$. Las χ_σ cumplen tambien ser ortonormales:

$$\sum_s \chi_{\sigma_1}^* \chi_{\sigma_2} = \delta_{\sigma_1,\sigma_2} \tag{5}$$

Calculando los elementos de matriz

1. El primer término de H_{el} es la suma de operadores de energía cinética:

$$\hat{p_i}^2 = (i\hbar\nabla_i)(i\hbar\nabla_i) = -\hbar^2\nabla_i^2 = -\hbar^2(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)_i \tag{6}$$

donde cada uno de los operadores actúa sobre una única partícula. Si los estados de la base los etiquetamos como $|nk\sigma>$, usaremos para calcular los elementos de matriz que:

$$|n_1, k_1, \sigma_1 >= \frac{1}{L} e^{i\boldsymbol{k_1\rho}} \phi_{n_1}(z)\chi_{\sigma_1}(s) \tag{7}$$

$$|n_2, k_2, \sigma_2 >= \frac{1}{L} e^{i\boldsymbol{k_2\rho}} \phi_{n_2}(z)\chi_{\sigma_2}(s) \tag{8}$$

El elemento de matriz que debemos calcular para escrbir H_{el} en segunda cuantización es:

$$< n_1, k_1, \sigma_1| - \frac{\hbar^2}{2m}(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) + u(z_i)|n_2, k_2, \sigma_2 >= \sum_s \frac{1}{L^2} \int d^3x e^{-i\boldsymbol{k}_1\rho} \phi_{n_1}^*(z)\chi_{\sigma_1}(s) \left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) + u(z_i)\right) \times e^{i\boldsymbol{k}_2\rho} \phi_{n_2}^*(z)\chi_{\sigma_2(s)} \tag{9}$$

Usando la condición de ortonormalidad de las funciones de spin, se tiene:

$$= \frac{1}{L^2}\delta_{\sigma_1,\sigma_2} \int d^3x e^{-i\boldsymbol{k}_1\rho} \phi_{n_1}^*(z) \left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) + u(z_i)\right) e^{i\boldsymbol{k}_2\rho} \phi_{n_2}(z) \tag{10}$$

$$= \frac{1}{L^2}\delta_{\sigma_1,\sigma_2} \int d^3x e^{-i\boldsymbol{k}_1\rho} \phi_{n_1}(z) \left[-\frac{\hbar^2}{2m}(\partial_x^2 + \partial_y^2) e^{i\boldsymbol{k}_2\rho} \phi_{n_2}(z) + \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_z^2 + u(z_i)\right) e^{i\boldsymbol{k}_2\rho} \phi_{n_2}(z)\right] \tag{11}$$

El primer término es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\partial_x^2 + \partial_y^2) e^{i(k_{2x}.x + k_{2y}.y)} \phi_{n_2}(z) = \frac{\hbar^2}{2m}\phi_{n_2}(z)(k_{2x}^2 + k_{2y}^2) e^{i\boldsymbol{k}_2\rho} \tag{12}$$

Para el segundo, utilizamos la ecuación de Schrödinger:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_z^2 + u(z_i)\right) \phi_{n_2}(z) = \epsilon_{n_2}\phi_{n_2}(z) \tag{13}$$

Entonces:

$$< n_1, k_1, \sigma_1| - \hbar^2(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) + u(z_i)|n_2, k_2, \sigma_2 >= \frac{1}{L^2}\delta_{\sigma_1,\sigma_2} \int d^3x e^{-i\boldsymbol{k}_1\rho} \phi_{n_1}^*(z) \left(\epsilon_{n_2}\phi_{n_2}(z) e^{i\boldsymbol{k}_2\rho} + \frac{\hbar^2}{2m}\phi_{n_2}(z)(k_{2x}^2 + k_{2y}^2) e^{i\boldsymbol{k}_2\rho}\right) \tag{14}$$

$$= \frac{1}{L^2}\delta_{\sigma_1,\sigma_2} \left(\frac{\hbar^2}{2m}(k_{2x}^2 + k_{2y}^2) + \epsilon_{n_2}\right) \int d^3x e^{-i\boldsymbol{k}_1\rho} \phi_{n_1}^*(z) e^{i\boldsymbol{k}_2\rho\phi_{n_2}}(z) \tag{15}$$

$$= \frac{1}{L^2}\delta_{\sigma_1,\sigma_2} \left(\frac{\hbar^2}{2m}(k_{2x}^2 + k_{2y}^2) + \epsilon_{n_2}\right) \int d_z \phi_{n_1}^*(z)\phi_{n_2}(z) \int d^2x e^{-i(\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2)} = \delta_{\sigma_1,\sigma_2}\delta_{n_1,n_2}\delta(\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2) \left(\frac{\hbar^2}{2m}(k_{2x}^2 + k_{2y}^2) + \epsilon_{n_2}\right) \tag{16}$$

Reemplazando en el primer término de la ecuación (4), se tiene que en segunda cuantización:

$$H_{el} = \sum_{k_1,\sigma_1,n_1} \sum_{k_2,\sigma_2,n_2} \delta_{\sigma_1,\sigma_2}\delta_{n_1,n_2}\delta(\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2) \left(\frac{\hbar^2}{2m}(k_{2x}^2 + k_{2y}^2) + \epsilon_{n_2}\right) a_{k_1,\sigma_1,n_1}^\dagger a_{k_2,\sigma_2,n_2} \tag{17}$$

$$= \sum_{k,\sigma,n} \frac{\hbar^2|\boldsymbol{k}|^2}{2m} a_{k,\sigma,n}^\dagger a_{k,\sigma,n} = \boxed{\sum_{k,\sigma,n} \frac{\hbar^2|\boldsymbol{k}|^2}{2m} n_{k,\sigma,n}} \tag{18}$$

El último operador es el numero de ocupación de un orbital k, con spin σ y en la subbanda ϵ_n

2. El segundo término es el potencial de interacción coulombiano, que es un operador de dos partículas y por lo tanto en segunda cuantización se escribe:

$$\hat{H_{pot}} = \frac{e^2}{2} \sum_{k_1,\sigma_1,n_1,\ldots,k_4,\sigma_4,n_4} < k_1, \sigma_1, n_1; k_2, \sigma_2, n_2| \frac{1}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|} |k_3, \sigma_3, n_3; k_4, \sigma_4, n_4 > a^\dagger_{k_1,\sigma_1,n_1} a^\dagger_{k_2,\sigma_2,n_2} a_{k_4,\sigma_4,n_4} a_{k_3,\sigma_3,n_3} \tag{19}$$

Reemplazando la base de soluciones y usando la ortonormalidad de las funciones de spin, se puede ver que el elemento de matriz es una integral que tiene la forma:

$$\frac{1}{L^4}\delta_{\sigma_1,\sigma_3}\delta_{\sigma_2,\sigma_4} \int\int d\boldsymbol{r} d\boldsymbol{r'} \frac{\phi^*_{n_1}(z)\phi^*_{n_2}(z')\phi_{n_3}(z)\phi_{n_4}(z')e^{-i(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_3)\boldsymbol{\rho}}e^{-i(\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_4)\boldsymbol{\rho'}}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} \tag{20}$$

Usando que $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}| = \sqrt{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho'}|^2 + (z-z')^2}$ y separando la parte en z de la dirección del plano, se tiene:

$$= \frac{1}{L^4}\delta_{\sigma_1,\sigma_3}\delta_{\sigma_2,\sigma_4} \int dz dz' \phi^*_{n_1}(z)\phi^*_{n_2}(z')\phi_{n_3}(z)\phi_{n_4}(z') \left[\int d^2\boldsymbol{\rho} d^2\boldsymbol{\rho'} \frac{e^{-i(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_3)\boldsymbol{\rho}}e^{-i(\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_4)\boldsymbol{\rho'}}}{\sqrt{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho'}|^2 + (z-z')^2}} \right] \tag{21}$$

Haciendo un cambio de variables:

$$\boldsymbol{x}_1 = \rho' \qquad \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho'} \tag{22}$$

se tiene que la integral del corchete es igual a:

$$\int d^2\boldsymbol{\rho} d^2\boldsymbol{\rho'} \frac{e^{-i(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_3)\boldsymbol{\rho}}e^{-i(\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_4)\boldsymbol{\rho'}}}{\sqrt{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho'}|^2 + (z-z')^2}} = \int d^2\boldsymbol{x}_1 e^{-i[(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)-(\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_4)]\boldsymbol{x}_1} \int d^2\boldsymbol{x_2} \frac{e^{i(\boldsymbol{k}_3-\boldsymbol{k}_1)\boldsymbol{x}_2}}{\sqrt{|\boldsymbol{x}_2|^2 + (z-z')^2}} \tag{23}$$

La primera integral es una delta de Dirac que fuerza la conservación del momento durante la interacción:

$$\int d^2\boldsymbol{x_1} e^{-i[(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)-(\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_4)]\boldsymbol{x}_1} = L^2\delta((\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)-(\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_4)) \tag{24}$$

La segunda integral es exactamente la del ejercicio, si llamamos $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{k}_3 - \boldsymbol{k}_1$:

$$\int d^2\boldsymbol{x_2} \frac{e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}_2}}{\sqrt{|\boldsymbol{x}_2|^2 + (z-z')^2}} = \frac{2\pi}{q}e^{-q|z-z'|} \tag{25}$$

Reemplazando en el elemento de matriz:

$$= \frac{2\pi}{qL^2}\delta_{\sigma_1,\sigma_3}\delta_{\sigma_2,\sigma_4}\delta((\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)-(\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_4)) \int dz dz' \phi^*_{n_1}(z)\phi^*_{n_2}(z')\phi_{n_3}(z)\phi_{n_4}(z')e^{-q|z-z'|} \tag{26}$$

La ultima integral se podría resolver si conocemos quienes son las autofunciones del problema unidimensional. Queda expresada la integral como $I_N(q)$ donde $N = (n_1, n_2, n_3, n_4)$. Entonces el elemento de matriz es:

$$= \frac{2\pi}{qL^2}\delta_{\sigma_1,\sigma_3}\delta_{\sigma_2,\sigma_4}\delta((\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)-(\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_4))I_N(q) \tag{27}$$

y el operador se puede escribir como:

$$\hat{H_{pot}} = \sum_{k_1,\sigma_1,n_1,\ldots,k_4,\sigma_4,n_4} \frac{\pi e^2}{qL^2}\delta_{\sigma_1,\sigma_3}\delta_{\sigma_2,\sigma_4}\delta((\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)-(\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_4))I_N(q) a^\dagger_{k_1,\sigma_1,n_1} a^\dagger_{k_2,\sigma_2,n_2} a_{k_4,\sigma_4,n_4} a_{k_3,\sigma_3,n_3} \tag{28}$$

El próximo trabajo es arreglar los momentos. La condición que impone la delta de Dirac es la conservación del momento:

$$\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{k_3} + \boldsymbol{k}_4 \tag{29}$$

Si tomamos un cambio de variables:

$$\boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{K} + \boldsymbol{q} \qquad \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{q} \tag{30}$$

$$\boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{K} \qquad \boldsymbol{k}_4 = \boldsymbol{P} \tag{31}$$

se cumple que:

$$\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{K} + \boldsymbol{P} = \boldsymbol{k_3} + \boldsymbol{k}_4 = \boldsymbol{K} + \boldsymbol{P} \tag{32}$$

por lo que el cambio mantiene la conservación del momento y ademas identifica a $\hbar(\boldsymbol{k_3} - \boldsymbol{k_1}) = \hbar \boldsymbol{q}$ como el momento intercambiado en la interacción entre las dos partículas. Contrayendo las deltas de spin, se tiene que:

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \lambda_1 \qquad \sigma_2 = \sigma_4 = \lambda_2 \tag{33}$$

Por lo tanto, el resultado final del operador es:

$$\hat{H_{pot}} = \sum_{\boldsymbol{K},\boldsymbol{P},\boldsymbol{q}} \sum_{\lambda_1,\lambda_2} \sum_{N} \frac{\pi e^2}{\boldsymbol{q}} I_N(q) a^\dagger_{\boldsymbol{K}+\boldsymbol{q},\lambda_1,n_1} a^\dagger_{\boldsymbol{P}-\boldsymbol{q},\lambda_2,n_2} a_{\boldsymbol{P},\lambda_2,n_4} a_{\boldsymbol{K},\lambda_1,n_3} \tag{34}$$

Juntando ambas partes del ejercicio, el hamiltoniano del gas cuasi 2D es:

$$\boxed{H = \sum_{\boldsymbol{K},\sigma,n} \frac{\hbar^2 |\boldsymbol{K}|^2}{2m} n_{\boldsymbol{K},\sigma,n} + \sum_{\boldsymbol{K},\boldsymbol{P},\boldsymbol{q}} \sum_{\lambda_1,\lambda_2} \sum_{N} \frac{\pi e^2}{\boldsymbol{q}} I_N(q) a^\dagger_{\boldsymbol{K}+\boldsymbol{q},\lambda_1,n_1} a^\dagger_{\boldsymbol{P}-\boldsymbol{q},\lambda_2,n_2} a_{\boldsymbol{P},\lambda_2,n_4} a_{\boldsymbol{K},\lambda_1,n_3}} \tag{35}$$

La segunda parte del ejercicio nos pide realizar un trabajo similar pero para el hamiltoniano del jellium model. Recordemos que el modelo es el de un gas de electrones emplazado sobre un background de carga positiva uniforme, distribuido de forma uniforme para que el sistema sea electricamente neutro. El nuevo hamiltoniano total será la suma de tres términos. Uno es el término de electrones, levemente modificado para que incluya el confinamiento y el factor de Yukawa en el potencial coulombiano:

$$H_{el} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + u(z_i) + \frac{e^2}{2} \sum_{i \neq j} \frac{e^{-\mu|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|}}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|} \tag{36}$$

otro término sera el de energía del background de carga positiva con densidad $n(x)$:

$$H_b = \frac{e^2}{2} \int d^3x d^3x' \frac{n(x) n(x') e^{-\mu|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \tag{37}$$

y por ultimo la energía de interacción electrón-background:

$$H_{el-b} = -e^2 \sum_{i=1}^{N} \int d^3x \frac{n(x) e^{-\mu|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_i|}}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}_i|} \tag{38}$$

El factor μ es un artilugio matemático para hacer converger las integrales y luego haremos tender el mismo a cero. Notar que para que el cálculo se pueda realizar explicitamente y no tengamos divergencias, es necesario pensar que en cada paso del cálculo se cumple:

$$\mu^{-1} << L \tag{39}$$

donde L es la dimensión de la caja en la que colocamos las partículas. Luego, este L tenderá a infinito para darnos el resultado bulk. Notar tambien que las únicas variables dinámicas son las correspondientes a los electrones, ya que el background positivo es inerte. Por lo tanto, la energía del background es integrable. Si la densidad de carga postiva es uniforme, de forma que $n(x) = N/L^3 = N/V$, entonces:

$$H_b = \frac{e^2}{2} \frac{N^2}{V^2} \int d^3x d^3x' \frac{e^{-\mu|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \tag{40}$$

Hacemos un cambio de variables en la integral: $\boldsymbol{z} = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}|$ que se justifica dado que el sistema tiene invariancia traslacional. Por lo tanto se tiene:

$$H_b = \frac{e^2}{2}\frac{N^2}{V^2}\int d^3x \int d^3z \frac{e^{-\mu z}}{z} = \frac{e^2}{2}\frac{N^2}{V}\int d^3z \frac{e^{-\mu z}}{z} = \frac{e^2}{2}\frac{N^2}{V}\frac{4\pi}{\mu^2} \tag{41}$$

donde en el último paso usamos un resultado conocido. Notar que el término diverge para $\mu = 0$ porque debido al largo alcance de la interacción coulombiana se permitiría la interacción de todos con todos.

Por otro lado, el término H_{el-b} es en principio un operador de una partícula, donde el operador es la densidad. Sin embargo, para un background uniforme en el espacio es nuevamente integrable. La integral utiliza el mismo truco de la invariancia traslacional para realizar el cálculo y por lo tanto se tiene que:

$$H_{el-b} = -e^2 \sum_{i=1}^{N} \int d^3x \frac{n(x)e^{-\mu|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_i|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_i|} = -e^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{N}{V}\int d^3z \frac{e^{-\mu z}}{z} = -e^2\frac{N^2}{V}\frac{4\pi}{\mu^2} \tag{42}$$

Reemplazando en el hamiltoniano original:

$$H = H_{el} + H_{el-b} + H_b = H_{el} + \left(\frac{e^2}{2}\frac{N^2}{V}\frac{4\pi}{\mu^2} - e^2\frac{N^2}{V}\frac{4\pi}{\mu^2}\right) = H_{el} - \frac{e^2}{2}\frac{N^2}{V}\frac{4\pi}{\mu^2} \tag{43}$$

Por lo tanto, todos los efectos físicos se encuentran contenidos en H_{el}. Este nuevo hamiltoniano se puede separar en dos partes. Una es la parte que resolvimos en el inciso anterior, que ya sabemos escribir en segunda cuantización por lo que podemos reciclar el resultado:

$$H_1 = \sum_{i=1}^{N} \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + u(z_i) = \sum_{k,\sigma,n} \frac{\hbar^2|\boldsymbol{k}|^2}{2m} a^\dagger_{k,\sigma,n} a_{k,\sigma,n} \tag{44}$$

Tenemos que ahora escribir el término del potencial de Yukawa de la expresión en segunda cuantización y utilizando la nueva base de soluciones confinadas:

$$H_2 = \frac{e^2}{2}\sum_{i\neq j} \frac{e^{-\mu|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|}}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|} = \frac{e^2}{2} \sum_{k_1,\sigma_1,n_1,\ldots,k_4,\sigma_4,n_4} < k_1,\sigma_1,n_1; k_2,\sigma_2,n_2| \frac{e^{-\mu|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|}}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|} |k_3,\sigma_3,n_3; k_4,\sigma_4,n_4 > a^\dagger_{k_1,\sigma_1,n_1} a^\dagger_{k_2,\sigma_2,n_2} a_{k_4,\sigma_4,n_4} a_{k_3,\sigma_3,n_3} \tag{45}$$

Reemplazando las funciones base, tendremos que calcular un elemento de matriz de la forma:

$$\frac{1}{L^4}\delta_{\sigma_1,\sigma_3}\delta_{\sigma_2,\sigma_4} \int dz dz' \phi^*_{n_1}(z)\phi^*_{n_2}(z')\phi_{n_3}(z)\phi_{n_4}(z') \left[\int d^2\rho d^2\rho' e^{-i(\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k_3})\boldsymbol{\rho}} e^{-i(\boldsymbol{k}_2 - \boldsymbol{k}_4)\boldsymbol{\rho'}} \frac{e^{-\mu\sqrt{(\rho-\rho')^2 + (z-z')^2}}}{\sqrt{(\rho-\rho')^2 + (z-z')^2}}\right] \tag{46}$$

Realizando la misma sustitución que antes, la integral entre corchetes es:

$$\int d^2x_1 d^2x_2 \left(e^{i((\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)-(\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_4))\boldsymbol{x_1}} \frac{e^{-\mu\sqrt{x_2^2+(z-z')^2}}}{\sqrt{x_2^2 + (z-z')^2}} e^{i(\boldsymbol{k}_3 - \boldsymbol{k}_1)\boldsymbol{x_2}}\right) \tag{47}$$

$$= \delta((\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2) - (\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_4)) \int d^2x_2 \frac{e^{-\mu\sqrt{x_2^2+(z-z')^2}} e^{i(\boldsymbol{k}_3-\boldsymbol{k}_1)\boldsymbol{x}_2}}{\sqrt{x_2^2+(z-z')^2}} = \delta((\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2) - (\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_4)) e^{-q|z-z'|}\frac{4\pi}{\boldsymbol{q}^2+\mu^2}$$

si $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{k_3} - \boldsymbol{k}_1$. Entonces, reemplazando resulta que:

$$\frac{4\pi}{(\boldsymbol{q}^2+\mu^2)L^2}\delta_{\sigma_1,\sigma_3}\delta_{\sigma_2,\sigma_4}\delta((\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2) - (\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_4)) \int dz dz' \phi^*_{n_1}(z)\phi^*_{n_2}(z')\phi_{n_3}(z)\phi_{n_4}(z') e^{-q|z-z'|} \tag{48}$$

$$= \frac{4\pi}{(\boldsymbol{q}^2+\mu^2)}\delta_{\sigma_1,\sigma_3}\delta_{\sigma_2,\sigma_4}\delta((\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2) - (\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_4)) I_N(q) \tag{49}$$

donde nuevamente dejamos expresada la integral en términos de las autofunciones. Si tomamos el cambio de variables que tomamos antes:

$$\boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{K} + \boldsymbol{q} \qquad \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{q} \tag{50}$$

$$\boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{K} \qquad \boldsymbol{k}_4 = \boldsymbol{P} \tag{51}$$

y contraemos las deltas de spin, el operador se escribe como:

$$\frac{e^2}{2}\sum_{i\neq j}\frac{e^{-\mu|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|}}{|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{j}}|} = \sum_{\lambda_1,\lambda_2}\sum_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{P},\boldsymbol{K}}\sum_{N}\frac{2\pi e^2}{(\boldsymbol{q}^2+\mu^2)} I_N(q) a^\dagger_{\boldsymbol{K}+\boldsymbol{q},\lambda_1,n_1} a^\dagger_{\boldsymbol{P}-\boldsymbol{q},\lambda_2,n_2} a_{\boldsymbol{P},\lambda_2,n_4} a_{\boldsymbol{K},\lambda_1,n_3} \tag{52}$$

Por lo tanto, el hamiltoniano del Jellium cuasi 2D es:

$$\sum_{k,\sigma,n}\frac{\hbar^2|\boldsymbol{k}|}{2m}\hat{n}_{k,\sigma,n} + \sum_{\lambda_1,\lambda_2}\sum_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{P},\boldsymbol{K}}\sum_{N}\frac{2\pi e^2}{(\boldsymbol{q}^2+\mu^2)} I_N(q) a^\dagger_{\boldsymbol{K}+\boldsymbol{q},\lambda_1,n_1} a^\dagger_{\boldsymbol{P}-\boldsymbol{q},\lambda_2,n_2} a_{\boldsymbol{P},\lambda_2,n_4} a_{\boldsymbol{K},\lambda_1,n_3} - \frac{e^2}{2}\frac{N^2}{V}\frac{4\pi}{\mu^2} \tag{53}$$