Guía de Ejercicios N°3: Formalismo de Segunda Cuantización

05/05/2021

1. Demostrar las reglas de anticonmutación que satisfacen los operadores de creación y destrucción de fermiones.

$$\{a_i, a_j\} = 0 \tag{1}$$

$$\left\{a_i^\dagger, a_j^\dagger\right\} = 0 \tag{2}$$

$$\left\{a_i, a_j^\dagger\right\} = \delta_{ij} \tag{3}$$

Demostraciones:

1.(1)Escribo la expresión del anticonmutador:

$$\{a_i, a_j\} = a_i a_j + a_j a_i$$

Resuelvo por partes

$$a_i a_j|n_1, .., n_i, .., n_j, .. >= a_i \theta_j n_j|n_1, .., n_i, .., 0_j, .. >= \theta_j n_j \theta_i n_i|n_1, .., 0_i, .., 0_j, .. >$$

$$a_j a_i|n_1, .., n_i, .., n_j, .. >= \theta_i n_i a_j|n_1, .., 0_i, .., n_j, .. >= \theta_i n_i \tilde{\theta}_j n_j|n_1, .., 0_i, .., 0_j, .. >$$

$$\tilde{\theta}_j = -\theta_j => \ \textit{Porque tengo un estado menos en } n_i.$$

$$a_j a_i|n_1, .., n_i, .., n_j, .. >= -\theta_i n_i \theta_j n_j|n_1, .., 0_i, .., 0_j, .. >$$

$$(a_i a_j + a_j a_i)|n_1, .., n_i, .., n_j, .. >= 0$$

$$\therefore \{a_i, a_j\} = 0$$

1.(2)Escribo la expresión del anticonmutador:

$$\left\{a_i^\dagger, a_j^\dagger\right\} = a_i^\dagger a_j^\dagger + a_j^\dagger a_i^\dagger$$

Resuelvo por partes

$$a_i^\dagger a_j^\dagger|n_1, .., n_i, .., n_j, .. >= a_i^\dagger \theta_j (1 - n_j)|n_1, .., n_i, .., 1_j, .. >= \theta_j (1 - n_j) \theta_i (1 - n_i)|n_1, .., 1_i, .., 1_j, .. >$$

$$a_j^\dagger a_i^\dagger|n_1, .., n_i, .., n_j, .. >= \theta_i (1 - n_i) a_j^\dagger|n_1, .., 1_i, .., n_j, .. >= \theta_i (1 - n_i) \tilde{\theta}_j (1 - n_j)|n_1, .., 1_i, .., 1_j, .. >$$

$$\tilde{\theta}_j = -\theta_j => \ \textit{Porque tengo un estado más en } n_i.$$

$$a_j^\dagger a_i^\dagger|n_1, .., n_i, .., n_j, .. >= -\theta_i (1 - n_i) \theta_j (1 - n_j)|n_1, .., 1_i, .., 1_j, .. >$$

$$(a_i^\dagger a_j^\dagger + a_j^\dagger a_i^\dagger)|n_1, .., n_i, .., n_j, .. >= 0$$

$$\therefore \left\{a_i^\dagger, a_j^\dagger\right\} = 0$$

1.(3)Escribo la expresión del anticonmutador:

$$\left\{a_i, a_j^\dagger\right\} = a_i a_j^\dagger + a_j^\dagger a_i$$

Resuelvo por partes

$$a_i a_j^\dagger |n_1, .., n_i, .., n_j, .. >= a_i \theta_j (1 - n_j)|n_1, .., n_i, .., 1_j, .. >= \theta_j (1 - n_j)\theta_i n_i |n_1, .., 0_i, .., 1_j, .. >$$

$$a_j^\dagger a_i |n_1, .., n_i, .., n_j, .. >= \theta_i n_i a_j^\dagger |n_1, .., 0_i, .., n_j, .. >= \theta_i n_i \tilde{\theta}_j (1 - n_j)|n_1, .., 0_i, .., 1_j, .. >= -\theta_i n_i \theta_j (1 - n_j)|n_1, .., 0_i, .., 1_j, .. >$$

$$(a_i a_j^\dagger + a_j^\dagger a_i)|n_1, .., n_i, .., n_j, .. >= 0 \;\; => \;\; para\ i \neq j.$$

si i = j:

$$a_i a_i^\dagger |n_1, .., n_i, .. >= a_i \theta_i (1 - n_i)|n_1, .., 1_i, .. >= \theta_i (1 - n_i)\theta_i |n_1, .., 0_i, .. >= (1 - n_i)\theta_i |n_1, .., 0_i, .. >$$

$$a_i^\dagger a_i |n_1, .., n_i, .. >= a_i^\dagger \theta_i n_i |n_1, .., 0_i, .. >= \theta_i n_i \theta_i |n_1, .., 1_i, .. >$$

$$(a_i a_i^\dagger + a_i^\dagger a_i)|n_1, .., n_i, .. >= \begin{cases} |n_1, .., 1_i, .. > & \text{si } ni = 1 \\ |n_1, .., 0_i, .. > & \text{si } ni = 0 \end{cases}$$

$$(a_i a_i^\dagger + a_i^\dagger a_i)|n_1, .., n_i, .. >= |n_1, .., n_i, .. >=> \left\{a_i, a_i^\dagger\right\} = 1$$

$$=> \therefore \left\{a_i, a_j^\dagger\right\} = \delta_{ij}$$

2. A partir de las reglas de anticonmutación, demostrar las siguientes identidades para los conmutadores de los operadores fermiónicos.

$$[a_i, a_j] = 2a_i a_j \tag{4}$$

$$\left[a_i^\dagger, a_j^\dagger\right] = 2a_i^\dagger a_j^\dagger \tag{5}$$

$$\left[a_i, a_j^\dagger\right] = 2a_i a_j^\dagger - \delta_{ij} \tag{6}$$

Demostraciones:

2.(4) Escribo el conmutador:

$$[a_i, a_j] = a_i a_j - a_j a_i$$

De la relación de anticonmutación 1.(1) hacemos:

$$\{a_i, a_j\} = a_i a_j + a_j a_i => a_j a_i = \{a_i, a_j\} - a_i a_j$$

Reemplazando

$$[a_i, a_j] = a_i a_j - [\{a_i, a_j\} - a_i a_j]$$

$$[a_i, a_j] = a_i a_j - 0 + a_i a_j = 2a_i a_j$$

$$\therefore [a_i, a_j] = 2a_i a_j$$

2.(5) Escribo el conmutador:

$$\left[a_i^\dagger, a_j^\dagger\right] = a_i^\dagger a_j^\dagger - a_j^\dagger a_i^\dagger$$

De la relación de anticonmutación 1.(2) hacemos:

$$\left\{a_i^\dagger, a_j^\dagger\right\} = a_i^\dagger a_j^\dagger + a_j^\dagger a_i^\dagger => a_j^\dagger a_i^\dagger = \left\{a_i^\dagger, a_j^\dagger\right\} - a_i^\dagger a_j^\dagger$$

Reemplazando

$$\left[a_i^\dagger, a_j^\dagger\right] = a_i^\dagger a_j^\dagger - \left[\left\{a_i^\dagger, a_j^\dagger\right\} - a_i^\dagger a_j^\dagger\right]$$

$$\left[a_i^\dagger, a_j^\dagger\right] = a_i^\dagger a_j^\dagger - 0 + a_i^\dagger a_j^\dagger = 2a_i^\dagger a_j^\dagger$$

$$\therefore \left[a_i^\dagger, a_j^\dagger\right] = 2a_i^\dagger a_j^\dagger$$

2.(6) Escribo el conmutador:

$$\left[a_i, a_j^\dagger\right] = a_i a_j^\dagger - a_j^\dagger a_i$$

De la relación de anticonmutación 1.(3) hacemos:

$$\left\{a_i, a_j^\dagger\right\} = a_i a_j^\dagger + a_j^\dagger a_i = \delta_{ij} => a_j^\dagger a_i = \delta_{ij} - a_i a_j^\dagger$$

Reemplazando

$$\left[a_i, a_j^\dagger\right] = a_i a_j^\dagger - \left[\delta_{ij} - a_i a_j^\dagger\right] = 2a_i a_j^\dagger - \delta_{ij}$$

$$\therefore \left[a_i, a_j^\dagger\right] = 2a_i a_j^\dagger - \delta_{ij}$$