Guía 3

Comentario

Primeramente mostraremos un par de propiedades de los operadores que nos vendrán bien en los ejercicios que siguen.

Como se tiene para los operadores de destrucción que $[a_i, a_j] = 2a_ia_j$, de que $[A, B] = AB - BA$ y por lo tanto $[A, B] = -[B, A]$, se deduce facilmente que $a_ia_j = -a_ja_i$. De idéntica forma resulta $a_i^\dagger a_j^\dagger = -a_j^\dagger a_i^\dagger$.

Por otra parte, recordemos que $\{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij}$.

Ejercicio 3

Debemos probar en este caso que

$$[a_i^\dagger a_j, a_k^\dagger a_l] = \delta_{jk}a_i^\dagger a_l - \delta_{il}a_k^\dagger a_j. \tag{1}$$

Por definición se tiene $[a_i^\dagger a_j, a_k^\dagger a_l] = a_i^\dagger a_j a_k^\dagger a_l - a_k^\dagger a_l a_i^\dagger a_j$. Sumemos y restemos $a_i^\dagger a_k^\dagger a_j a_l$ y $a_k^\dagger a_i^\dagger a_l a_j$, con lo cual se obtiene

$$\begin{aligned}[a_i^\dagger a_j, a_k^\dagger a_l] = a_i^\dagger a_j a_k^\dagger a_l - a_k^\dagger a_l a_i^\dagger a_j \\ + a_i^\dagger a_k^\dagger a_j a_l - a_i^\dagger a_k^\dagger a_j a_l \\ + a_k^\dagger a_i^\dagger a_l a_j - a_k^\dagger a_i^\dagger a_l a_j\,,\end{aligned} \tag{2}$$

donde hemos coloreado los términos que agruparemos. Tomemos entonces entre los términos indicados factor común a derecha y a izquierda, según corresponda, de donde resulta

$$\begin{aligned}[a_i^\dagger a_j, a_k^\dagger a_l] = a_i^\dagger(a_j a_k^\dagger + a_k^\dagger a_j)a_l - a_k^\dagger(a_l a_i^\dagger + a_i^\dagger a_l)a_j \\ - a_i^\dagger a_k^\dagger a_j a_l + a_k^\dagger a_i^\dagger a_l a_j\,.\end{aligned} \tag{3}$$

Pero justamente los términos marcados son, respectivamente, los anticonmutadores $\{a_j, a_k^\dagger\}$ y $\{a_l, a_i^\dagger\}$, con lo cual tenemos

$$\begin{aligned}[a_i^\dagger a_j, a_k^\dagger a_l] = \delta_{jk}a_i^\dagger a_l - \delta_{il}a_k^\dagger a_j \\ - a_i^\dagger a_k^\dagger a_j a_l + a_k^\dagger a_i^\dagger a_l a_j\,.\end{aligned} \tag{4}$$

Finalmente notar que, como $a_k^\dagger a_i^\dagger = -a_i^\dagger a_k^\dagger$ y $a_l a_j = -a_j a_l$, conmutando dos veces se tiene que $a_i^\dagger a_k^\dagger a_j a_l = a_k^\dagger a_i^\dagger a_l a_j$ con lo que la segunda linea de la ecuación se anula y por lo tanto se obtiene la identidad de la ec. (1).

Ejercicio 4

Debemos probar ahora que

$$[a_i^\dagger a_j, a_k^\dagger a_l^\dagger a_m a_n] = \delta_{jm} a_k^\dagger a_l^\dagger a_n a_j + \delta_{jk} a_i^\dagger a_l^\dagger a_m a_n - \delta_{in} a_k^\dagger a_l^\dagger a_m a_j - \delta_{jl} a_i^\dagger a_k^\dagger a_m a_n . \quad (5)$$

Una vez más, expresemos explicitamente por definición el conmutador, se tiene aquí $[a_i^\dagger a_j, a_k^\dagger a_l^\dagger a_m a_n] = a_i^\dagger a_j a_k^\dagger a_l^\dagger a_m a_n - a_k^\dagger a_l^\dagger a_m a_n a_i^\dagger a_j$. De nuevo, sumemos y restemos, pero esta vez $a_i^\dagger a_k^\dagger a_j a_l^\dagger a_m a_n$ y $a_k^\dagger a_l^\dagger a_m a_i^\dagger a_n a_j$, con lo cual se obtiene

$$\begin{aligned}[a_i^\dagger a_j, a_k^\dagger a_l^\dagger a_m a_n] = {} & a_i^\dagger a_j a_k^\dagger a_l^\dagger a_m a_n - a_k^\dagger a_l^\dagger a_m a_n a_i^\dagger a_j \\ & + a_i^\dagger a_k^\dagger a_j a_l^\dagger a_m a_n - a_i^\dagger a_k^\dagger a_j a_l^\dagger a_m a_n \\ & + a_k^\dagger a_l^\dagger a_m a_i^\dagger a_n a_j - a_k^\dagger a_l^\dagger a_m a_i^\dagger a_n a_j \, . \end{aligned} \quad (6)$$

Nuevamente hemos coloreado términos que asociando, y con el mismo argumento del ejercicio anterior, nos permiten escribir

$$\begin{aligned}[a_i^\dagger a_j, a_k^\dagger a_l^\dagger a_m a_n] = {} & \delta_{jk} a_i^\dagger a_l^\dagger a_m a_n - \delta_{in} a_k^\dagger a_l^\dagger a_m a_j \\ & - a_i^\dagger a_k^\dagger a_j a_l^\dagger a_m a_n + a_k^\dagger a_l^\dagger a_m a_i^\dagger a_n a_j \, . \end{aligned} \quad (7)$$

Sumemos y restemos ahora $a_i^\dagger a_k^\dagger a_l^\dagger a_j a_m a_n$ y $a_k^\dagger a_l^\dagger a_i^\dagger a_m a_n a_j$, con lo cual se obtiene

$$\begin{aligned}[a_i^\dagger a_j, a_k^\dagger a_l^\dagger a_m a_n] = {} & \delta_{jk} a_i^\dagger a_l^\dagger a_m a_n - \delta_{in} a_k^\dagger a_l^\dagger a_m a_j \\ & - a_i^\dagger a_k^\dagger a_j a_l^\dagger a_m a_n + a_k^\dagger a_l^\dagger a_m a_i^\dagger a_n a_j \\ & + a_i^\dagger a_k^\dagger a_l^\dagger a_j a_m a_n - a_i^\dagger a_k^\dagger a_l^\dagger a_j a_m a_n \\ & + a_k^\dagger a_l^\dagger a_i^\dagger a_m a_n a_j - a_k^\dagger a_l^\dagger a_i^\dagger a_m a_n a_j \, . \end{aligned} \quad (8)$$

Y con el mismo argumento de antes (para facilitar la identificación de los anticonmutadores hemos coloreado los términos a asociar) llegamos por lo tanto a que

$$\begin{aligned}[a_i^\dagger a_j, a_k^\dagger a_l^\dagger a_m a_n] = {} & \delta_{jk} a_i^\dagger a_l^\dagger a_m a_n - \delta_{in} a_k^\dagger a_l^\dagger a_m a_j \\ & - \delta_{jl} a_i^\dagger a_k^\dagger a_m a_n + \delta_{im} a_k^\dagger a_l^\dagger a_n a_j \\ & + a_i^\dagger a_k^\dagger a_l^\dagger a_j a_m a_n - a_k^\dagger a_l^\dagger a_i^\dagger a_m a_n a_j \, . \end{aligned} \quad (9)$$

Finalmente, si en el primer término de la última linea conmutamos $a_i^\dagger a_k^\dagger$ y luego $a_i^\dagger a_l^\dagger$, y también $a_j a_m$ y luego $a_j a_n$, se obtiene que ese primer término es igual al segundo y por lo tanto se cancelan (notar que la cantidad de permutaciones es par). Con esto llegamos a confirmar la identidad presentada en la ec.(5).