Guía 4. Plasmones

1) Repasar la representación de Heisenberg y hacer la demostración de la ecuación de movimiento para operadores (ecuación de Heisenberg) usada en clase.

Sol. La ecuación de movimiento de Heisenberg usada en clase es: $\frac{d}{dt} a^{+}_{\vec{k}-\vec{q}} a_{\vec{k}} = \frac{i}{\hbar}[H, a^{+}_{k-q} a_{k}]$

Hagamos previamente el repaso de la representación de Heisenberg siguiendo texto de cuántica.

Repaso La representación de Schrödinger considera que los estados dependen explícitamente del tiempo $|\Psi(t)\rangle_S$ y que los operadores no tienen dependencia explícita del tiempo. No obstante, podemos usar una representación alternativa en donde los operadores dependan explícitamente del tiempo y los estados $|\Psi\rangle_H$ sean independientes del tiempo. Estas dos representaciones se relacionan entre sí a través de un operador unitario, por lo tanto ambas son equivalentes entre sí.

Operador evolución: Es el operador unitario al que hacíamos referencia, $U(t,t_0)$ y determina la evolución al tiempo ...

de onda $\psi(t)$ o estado $|\psi(t)\rangle$, de la manera siguiente: $|\psi(t)\rangle = U(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle$

donde $|\psi(t_0)\rangle$ es el estado en tiempo inicial t_0

Si consideramos al sistema conservativo, entonces su energía viene representada por el Hamiltoniano y no depende del tiempo. Entonces $U(t,t_0)$ se puede deducir suponiendo que el movimiento de tal sistema sea periódico y obedezca además la ley de Planck-Einstein $E=\hbar\omega$.

Consideremos autovectores de H, $u_E(t_0)$ de energía E. $\Rightarrow H|u_E(t_0)\rangle = E|u_E(t_0)\rangle$

Entonces, segun la ley de Einstein podemos suponer que la evolución en el tiempo obedece la relación siguiente:

$$|u_E(t)\rangle = e^{-i\omega(t-t_0)}|u_E(t_0)\rangle$$

donde $E=\hbar\omega \Rightarrow \omega = \frac{E}{\hbar}$

$$\Rightarrow |u_E(t)\rangle = e^{-\frac{iE(t-t_0)}{\hbar}}|u_E(t_0)\rangle$$

y como el sistema es conservativo $\Rightarrow H = E$ (E total)

$$\Rightarrow |u_E(t)\rangle = e^{\frac{iH(t-t_0)}{\hbar}}|u_E(t_0)\rangle$$

Por lo tanto: $U(t,t_0)_S = e^{-\frac{iH_S(t-t_0)}{\hbar}} \Rightarrow U(t,t_0)_S = e^{-\frac{iH_S(t-t_0)}{\hbar}}$

Si nos fijamos bien, $U(t,t_0)$ satisface una ecuación diferencial ordinaria:

$$i\hbar \frac{dU}{dt} = HU \quad \text{con la condición inicial } U(t_0,t_0) = 1$$

Representación de Heisenberg (Fte. Gross - Runge - Heinonen p143)

En esta representación se selecciona esta definición

$$A(t) \equiv U^{\dagger}(t,t_0)_S = U(t_0,t)_S$$

Con ello, las funciones de onda o estados son constantes:

$$|\psi(t)\rangle_H = A(t)|\psi(t)\rangle_S$$
$$= U(t_0,t)|\psi(t)\rangle_S$$
$$= |\psi(t_0)\rangle_S = \text{constante}$$

Por otra parte, los operadores están dados por:

$$O(t)_H = U^{\dagger}(t,t_0)_S \, O(t)_S \, U(t,t_0)_S$$

fijemos $t_0 = 0$ y $H_S \neq H_S(t)$ explícitamente. Con esto tenemos:

$$O(t)_H = e^{\frac{iH_S t}{\hbar}} \, O(t)_S \, e^{-\frac{iH_S t}{\hbar}}$$

La dinámica ahora está contenida en los operadores. Deduciremos ecuación de movimiento.

$$\Rightarrow i\hbar \frac{d}{dt} O(t)_H = i\hbar \frac{d}{dt}\left(U_S^\dagger O_S U_S\right)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} O(t)_H = i\hbar \frac{\partial U_S^\dagger}{\partial t}(O_S U_S) + i\hbar U_S^\dagger \frac{d}{dt}(O_S U_S)$$

$$= i\hbar \frac{\partial U_S^\dagger}{\partial t}(O_S U_S) + i\hbar U_S^\dagger \frac{\partial O_S}{\partial t} U_S + i\hbar U_S^\dagger O_S \frac{\partial U_S}{\partial t}$$

Calculemos $\frac{\partial U_S}{\partial t}$ y $\frac{\partial U_S^\dagger}{\partial t}$ usando $U_S = e^{-iH_S t/\hbar}$

$$\frac{\partial U_S}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} H_S e^{-iH_S t/\hbar} \Rightarrow i\hbar \frac{\partial U_S}{\partial t} = H_S U_S$$

$$\frac{\partial U_S^\dagger}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} H_S e^{iH_S t/\hbar} \Rightarrow -i\hbar \frac{\partial U_S^\dagger}{\partial t} = U_S^\dagger H_S$$

sustituyamos entonces:

$$= -U_S^\dagger H_S O_S U_S + i\hbar U_S^\dagger \frac{\partial O_S}{\partial t} U_S + U^\dagger O_S H_S U_S$$

intercalamos $UU^\dagger$ en el 1er y 3er sumando sabiendo que $UU^\dagger = 1$

$$= -U_S^\dagger H U_S U^\dagger O_S U_S + i\hbar U_S^\dagger \frac{\partial O_S}{\partial t} U_S + U^\dagger O_S U_S U_S^\dagger H_S U_S$$

$$= -H_H O_H + i\hbar U_S^\dagger \frac{\partial O_S}{\partial t} U_S + O_H H_H$$

$$= [O_H, H_H] + i\hbar \frac{\partial O_H}{\partial t}$$

$$= i\hbar \frac{d O_H}{dt} = [O_H, H_H] + i\hbar \frac{\partial O_H}{\partial t}$$

HOJA N° 5

FECHA

En el caso de los operadores de creación y destrucción visto en clase, ellos no dependen explícitamente del tiempo, es decir $\tilde{a}_i^{\dagger} \neq a_i^{\dagger}(t)$ y $\hat{a}_j \neq \hat{a}_j(t)$

Por lo tanto si llamamos $O_H = a^{\dagger}_{\vec{k}-\vec{q}}\, a_{\vec{k}}$ entonces,

$$\frac{\partial O_H}{\partial t} = 0 .$$

Nos queda entonces:

$$i\hbar \frac{d}{dt} a^{\dagger}_{\vec{k}-\vec{q}}\, a_{\vec{k}} = [a^{\dagger}_{\vec{k}-\vec{q}}\, a_{\vec{k}}, H]$$

$$\frac{d}{dt} a^{\dagger}_{\vec{k}-\vec{q}}\, a_{\vec{k}} = \frac{-i}{\hbar}[a^{\dagger}_{\vec{k}-\vec{q}}\, a_{\vec{k}}, H]$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} a^{\dagger}_{\vec{k}-\vec{q}}\, a_{\vec{k}} = \frac{i}{\hbar}[H, a^{\dagger}_{\vec{k}-\vec{q}}\, a_{\vec{k}}]}$$