1 Guía 4: *Plasmones*

1.1 Ejercicio 5

A partir de la formula de Lindhard para la función dieléctrica longitudinal:

$$\epsilon(\mathbf{q}, w) = 1 - V_q \sum_{\mathbf{q}} \frac{f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - f_{\mathbf{k}}}{\hbar(w + i\delta + \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}})} \tag{1}$$

Se pueden hacer diferentes análisis, en este caso se estudiará el límite de la formula (1) en longitudes de ondas largas $\lambda \to \infty$ y $q \propto 1/\lambda \to 0$, para un sistema de 2 dimensiones.
Vamos a iniciar haciendo expansiones de ciertos términos de la ecuación (1):

$$E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - E_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2}{2m}(k^2 - 2\mathbf{k}.\mathbf{q} + q^2) - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \simeq -\frac{\hbar^2 \mathbf{k}.\mathbf{q}}{m} \tag{2}$$

$$f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - f_{\mathbf{k}} = f_{\mathbf{k}} - \mathbf{q}.\bigtriangledown_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} + ... - f_{\mathbf{k}} \simeq -\mathbf{q}.\bigtriangledown_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} \tag{3}$$

Por otro lado, a partir de la expresión de la densidad vista en la teoría

$$\langle \rho_q \rangle = V_q \langle \rho_q \rangle \sum_{\mathbf{k}} \frac{f_{\mathbf{k}\text{-}\mathbf{q}} - f_{\mathbf{k}}}{\hbar(w + i\delta + \epsilon_{k-q} - \epsilon_k)}$$

llegamos a la siguiente relación:

$$V_q \sum_{\mathbf{k}} \frac{f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - f_{\mathbf{k}}}{\hbar(w_{\mathbf{q}} + \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}})} = 1 \tag{4}$$

reemplazando las expansiones (2) y (3) en (4):

$$1 \simeq -\frac{V_q}{\hbar w_0} \sum_{\mathbf{k},i} q_i \frac{\partial f}{\partial k_i} \left(1 + \frac{\hbar \mathbf{k}.\mathbf{q}}{m w_0}\right) \tag{5}$$

desarrollando el primer termino de la ecuación anterior

$$\sum_q \mathbf{q}.\bigtriangledown_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_i q_i \frac{\partial f(\mathbf{k})}{\partial k_i} \tag{6}$$

$$\sum_q \mathbf{q}.\bigtriangledown_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k}) = \frac{1}{(\triangle k)^3} \sum_{i=1}^{3} q_i \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \frac{\partial f(k)}{\partial k_i} = 0 \tag{7}$$

con lo cual la ecuación (4) puede ser escrita como:

$$1 \simeq -\frac{V_q}{\hbar w_0}\sum_{\mathbf{k},i} q_i \frac{\partial f}{\partial k_i}\frac{\hbar \mathbf{k}.\mathbf{q}}{m w_0} \tag{8}$$

Volviendo a la Formula de Lindhard para una Función Dieléctrica Longitudinal, despejamos el termino trabajado anteriormente

$$\epsilon(\mathbf{q}, w) - 1 = -V_q \sum_{\mathbf{q}} \frac{f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - f_{\mathbf{k}}}{\hbar(w + i\delta + \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}})} \tag{9}$$

$$\simeq -\frac{V_q}{\hbar w_0}\sum_{\mathbf{k},i} q_i \frac{\partial f}{\partial k_i}\frac{\hbar \mathbf{k}.\mathbf{q}}{m w_0} \tag{10}$$

$$= \frac{V_q}{\hbar w_0}\int_{\infty}^{\infty}\sum_{i} q_i \frac{\partial f}{\partial k_i}\frac{\hbar \mathbf{k}.\mathbf{q}}{m w_0} d^2k \tag{11}$$

llegamos a :

$$\boxed{\epsilon(\mathbf{q}, w) - 1 = 2\frac{V_q}{m w_0^2}\frac{L^2}{(2\pi^2)}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i,j} q_i q_j k_j \frac{\partial f}{\partial k_i} d^2k} \tag{12}$$

Resolvemos la integral:

$$2\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} k_j \frac{\partial f_k}{\partial k_i} = 2\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} k_j \frac{\partial f_k}{\partial k_j}\frac{\partial k_j}{\partial k_i} = 2\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} f_k \frac{\partial k_j}{\partial k_i} \tag{13}$$

Recordando que:

$$\frac{\partial k_j}{\partial k_i} = \delta_{ij} \qquad N = 2\sum_k f_k$$

obtenemos:

$$2\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} f_k \frac{\partial k_j}{\partial k_i} = -2\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{(2\pi)^2}{L^2}\sum_k f_k \delta_{ij} = -\frac{N}{L^2}\delta_{ij} = -n\delta_{ij} \tag{14}$$

Reemplazando este resultado en la ecuación (12):

$$\epsilon(\mathbf{q}, w) - 1 = \frac{V_q}{m w_0^2}\frac{L^2}{(2\pi^2)} q_i q_j \left(-\frac{N}{L^2 \delta_{ij}}\right) \tag{15}$$

Si i=j, y sabiendo que $V_q = \frac{4\pi e^2}{\epsilon_0 q^2 L^3}$

$$\epsilon(\mathbf{q}, w) - 1 = -\frac{4\pi e^2}{\epsilon_0 q^2 L^3}\frac{L^2}{m w^2} q^2 \frac{N}{L^2} = -\frac{4\pi e^2}{\epsilon_0 m}\frac{n}{w^2} = -\frac{w_{pl}^2}{w^2} \tag{16}$$

y así llegamos al resultado esperado:

$$\boxed{\epsilon(q \to 0, w) = 1 - \frac{w_{pl}^2}{w^2}} \tag{17}$$

que es el conocido *resultado de Drude.*Este resultado es muy útil para el estudio de las propiedades ópticas de los metales, en distintos rangos de frecuencias.

En la ecuación anterior introducimos la **frecuencia de plasma**:

$$\boxed{w_{pl} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n}{\epsilon_0 m}}} \tag{18}$$

esta sería la frecuencia a la que ocurren las oscilaciones electrónicas longitudinales dentro del plasma.

1.2 Ejercicio 6

El número de onda de apantallamiento en 3D tiene la siguiente expresión:

$$\kappa = \sqrt{\frac{4\pi e^2}{\epsilon_0}\frac{\partial n}{\partial \mu}} \tag{19}$$

Por lo que vamos a necesitar conocer en cada caso la relación de la densidad con el potencial químico.

a) Gas de electrones degenerado $(T = 0)$(*Distribución de Fermi-Dirac*)

$$n = \frac{1}{(2\pi)^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^2 \frac{2}{3} E_f^{3/2} \tag{20}$$

en donde se considera $E_F \equiv \mu(T = 0) = \hbar^2 k_F^2/2m$

Derivando la ecuación (20) con respecto a E_F

$$\frac{\partial n}{\partial \mu} = \frac{\partial n}{\partial E_F} = \frac{3}{2}\frac{1}{(2\pi)^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^2 \frac{2}{3} E_f^{1/2} = \frac{3}{2}\frac{n}{E_F} \tag{21}$$

reemplazando este valor en (19)

$$\kappa = \sqrt{\frac{4\pi e^2}{\epsilon_0}\frac{3}{2}\frac{n}{E_F}} = \sqrt{\frac{6\pi e^2 n}{\epsilon_0 E_F}} \tag{22}$$

Obtuvimos el **Número de Onda de Apantallamiento de Thomas-Fermi 3D**

b)Gas de electrones no degenerado (*Distribución de Boltzman*)
La Distribución de Boltzman tiene la forma:

$$f_k = \frac{e^{\beta(\mu - E_k)}}{1 + e^{\beta(\mu - E_k)}} \simeq e^{\beta\mu} e^{-\beta E_k} \tag{23}$$

Buscamos la densidad para este caso:

$$n = \frac{e^{\beta\nu}}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2 \beta} \right)^{3/2} \int_0^\infty dx \sqrt{x} e^{-x} \qquad con \qquad x = \beta E_k \tag{24}$$

La integral se puede obtener fácilmente de tablas:

$$\int_0^\infty dx \sqrt{x} e^{-x} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Reemplazando el resultado en la ecuación (25):

$$n = \frac{e^{\beta\nu}}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2 \beta} \right)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{25}$$

$$n = \frac{e^{\beta\nu}}{4} \pi^{-3/2} \left(\frac{2m}{\hbar^2 \beta} \right)^{3/2} \tag{26}$$

$$n = \frac{e^{\beta\mu}}{4} \left(\frac{2m}{\hbar^2 \beta \pi} \right)^{3/2} \tag{27}$$

$$n = n_0 e^{\beta\mu} \tag{28}$$

Calculamos la derivada

$$\frac{\partial n}{\partial \mu} = n_0 \beta e^{\beta\mu} \tag{29}$$

$$\frac{\partial n}{\partial \mu} = n\beta \tag{30}$$

Sustituyendo el resultado anterior en la formula (19)

$$\kappa = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n \beta}{\epsilon_0}} \tag{31}$$

lo que se denomina **Número de Onda de Apantallamiento Debye H$\ddot{u}$ckel en 3D**

Vamos a determinar el número de onda de apantallamiento para el cobre (Cu),como ejemplo de la aplicación a un metal:

- **T=0** $\Rightarrow$ Número de Onda de Apantallamiento de Thomas-Fermi 3D

  Según la ecuación (22) necesitamos los siguientes datos: densidad del gas de electrones n y la energía de Fermi E_{Fcu} correspondientes al cobre, el resto de datos son constantes conocidas.

  $e = 1.6 \times 10^{-19}$C
  $\epsilon_0 = 10 \times 10^{-12} C^2.J^{-1}$ (elegimos redondear el valor en clases y nos quedamos con la unidad conveniente,según las unidades de las otras cantidades)
  $n = 8.45 \times 10^{28} m^{-3}$ (valor tabulado, pero también puede ser calculado a través de la expresión conocida de la densidad para el gas de electrones)
  $E_{Fcu} = 7eV = 1.1215 \times 10^{-18} J$

$$\kappa = \sqrt{\frac{6\pi e^2 n}{\epsilon_0 E_F}} = \sqrt{\frac{6\pi(1.6\times 10^{-19})^2 C^2 .8.45\times 10^{28} m^{-3}}{10\times 10^{-12}\frac{C^2}{Jm}.1.1215\times 10^{-18} J}} = \sqrt{3.63\times 10^{21} m^2}$$

$$\boxed{\kappa = 6.03 \times 10^{10} m^{-1}} \tag{32}$$

- Para **T=300 K** $\Rightarrow$ Número de Onda de Apantallamiento Debye H$\ddot{u}$ckel en 3D

  Para este caso, según la ecuación (31) necesitamos encontrar el valor de beta β para la temperatura propuesta, el resto de datos son constantes conocidas que ya explicitamos en el item anterior incluida la densidad del cobre (la cual vamos a considerar que no varía).

  Para encontrar β necesitamos la temperatura (que es dato,porque vamos a considerar temperatura ambiente) y la constante de Boltzman.

$$\beta = \frac{1}{k_B T}$$

Tenemos que: $T = 300K$ y $K_B = 1.38 \times 10^{-23} J/K$

Con lo cual nos queda $\beta = 2.4 \times 10^{20} J$

Reemplazando los valores en la ecuación (31):

$$\kappa = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n\beta}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi(1.6 \times 10^{-19})C^2 8.45 \times 10^{28} m^{-3}.2.4 \times 10^{20} J^{-1}}{10 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Jm}}}$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{6.52 \times 10^{12} m^{-3}}{10 \times 10^{-12} m^{-1}}} = \sqrt{(6.52 \times 10^{23}) m^{-2}}$$

$$\boxed{\kappa = 8.07 \times 10^{11} m^{-1}} \tag{33}$$

Comparando los valores de (32) y de (33) ,**¿cuál es más eficaz?**

Dado que κ nos indica la longitud de apantallamiento inverso podemos decir que el método de Thomas-Fermi es más eficaz, ya que el apantallamiento va a extenderse a una mayor longitud.