Guía 4

Comentario

Primeramente recordemos de ejercicios precedentes las siguientes dos identidades que usaremos:

$$[a_i^\dagger a_j, a_k^\dagger a_l] = \delta_{jk} a_i^\dagger a_l - \delta_{il} a_k^\dagger a_j\,, \tag{1}$$

$$[a_i^\dagger a_j, a_k^\dagger a_l^\dagger a_m a_n] = \delta_{jm} a_k^\dagger a_l^\dagger a_n a_j + \delta_{jk} a_i^\dagger a_l^\dagger a_m a_n - \delta_{in} a_k^\dagger a_l^\dagger a_m a_j - \delta_{jl} a_i^\dagger a_k^\dagger a_m a_n. \tag{2}$$

Ejercicio 2

a) Deseamos analizar la ecuación (8.3) del libro de Haug y Koch que da la evolución de $a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}}$ según el formalismo de Heisenberg, a saber

$$\frac{d}{dt} a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}} = \frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}, a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}}], \tag{3}$$

donde $\mathcal{H}$ es el hamiltoniano, el cual, por comodidad, nosotros llamaremos $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, con

$$\mathcal{H}_1 = \sum_{\mathbf{k}} E_k\, a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}\,, \tag{4}$$

$$\mathcal{H}_2 = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q}\neq 0} V_q\, a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}}\,. \tag{5}$$

De esta forma, el análisis del conmutador presente en la ec. (3) lo subdividiremos en dos por comodidad.

i) De la primera identidad mencionada (ec.(1)) aplicada al conmutador $[a_{\mathbf{k}'}^\dagger a_{\mathbf{k}'}, a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}}]$ en forma directa resulta

$$[a_{\mathbf{k}'}^\dagger a_{\mathbf{k}'}, a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}}] = \delta_{\mathbf{k}',\mathbf{k}-\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}'}^\dagger a_{\mathbf{k}} - \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}'}, \tag{6}$$

y por lo tanto

$$\sum_{\mathbf{k}'} E_{k'} [a_{\mathbf{k}'}^\dagger a_{\mathbf{k}'}, a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}}] = \sum_{\mathbf{k}'} E_{k'} (\delta_{\mathbf{k}',\mathbf{k}-\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}'}^\dagger a_{\mathbf{k}} - \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}'}). \tag{7}$$

Hagamos notar que al sumar sobre todos los $\mathbf{k}'$ la primera δ hace sobrevivir sólo al término con $\mathbf{k}' = \mathbf{k} - \mathbf{q}$ y la segunda al término con $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$, por lo cual resulta

$$\sum_{\mathbf{k}'} E_{k'} [a_{\mathbf{k}'}^\dagger a_{\mathbf{k}'}, a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}}] = E_{k-q} a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}} - E_k a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}}. \tag{8}$$

Finalmente, multiplicando todo por $i/\hbar$ y sacando factor común a derecha $a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}}$, tenemos

$$\frac{i}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}'} E_{k'} [a^\dagger_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}'}, a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}}] = i(\,\epsilon_{k-q} - \epsilon_k) a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}}, \tag{9}$$

donde se ha llamado $\epsilon_j = E_j/\hbar$. Notar que este resultado es el presentado en la ecuación (8.5) del libro de Haug y Koch, y significa que

$$\frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}_1, a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}}] = i(\,\epsilon_{k-q} - \epsilon_k) a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}}, \tag{10}$$

que es parte de la expresión del miembro derecho de la ec. (3).

ii) Debemos ahora hacer algo similar con $\mathcal{H}_2$, para lo cual apliquemos la segunda identidad (dada en la ec. (2)) al conmutador $[a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}}, a^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{k}'}]$, de donde se obtiene

$$\begin{aligned}[a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}}, a^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{k}'}] &= \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{p}'} a^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}} a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}} + \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'-\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} a^\dagger_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{k}'} \\ &\quad - \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}'} a^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{k}} - \delta_{\mathbf{k},\mathbf{p}'+\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} a^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{k}'}\,.\end{aligned} \tag{11}$$

Hagamos notar que al sumar sobre todos los $\mathbf{k}'$, $\mathbf{p}'$ y $\mathbf{p}$ hay un coeficiente V_p multiplicando, pero evitaremos tocar el índice $\mathbf{p}$ en esto: la primera δ hace sobrevivir sólo al término con $\mathbf{p}' = \mathbf{k} - \mathbf{q}$, la segunda al término con $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{p}$, la tercera al término $\mathbf{k}' = \mathbf{k} - \mathbf{q}$ y la cuarta al $\mathbf{p}' = \mathbf{k} - \mathbf{p}$, por lo cual resulta

$$\begin{aligned}[a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}}, a^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{k}'}] &= a^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}+\mathbf{p}} a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}} + a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} a^\dagger_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{k}+\mathbf{p}} \\ &\quad - a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}-\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{k}} - a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} a^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{p}} a_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} a_{\mathbf{k}'}\,.\end{aligned} \tag{12}$$

Por lo tanto se tiene

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{\mathbf{k}',\mathbf{p}',\mathbf{p}\neq 0} \frac{iV_p}{2\hbar} [a^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{k}'}, a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}}] = \\ &\quad\textstyle\sum_{\mathbf{k}',\mathbf{p}',\mathbf{p}\neq 0} \frac{iV_p}{2\hbar} (-a^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}+\mathbf{p}} a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}} - a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} a^\dagger_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{k}+\mathbf{p}} \\ &\qquad + a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}-\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{k}} + a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} a^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{p}} a_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} a_{\mathbf{k}'})\,,\end{aligned} \tag{13}$$

que corresponde a la ecuación (8.7) del libro de Haug y Koch.

b) Debido a que el potencial es simétrico resulta ser $V_p = V_{-p}$, por lo tanto, si en la ec. (13), en el primero y segundo sumandos del paréntesis del miembro derecho hacemos $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$ resulta

$$
\begin{aligned}
(-a^\dagger_{\mathbf{k}'+\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}-\mathbf{p}} a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}} - a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} a^\dagger_{\mathbf{p}'-\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} \\
+ a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}-\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{k}} + a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} a^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{p}} a_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} a_{\mathbf{k}'})\,,
\end{aligned}
\tag{14}
$$

y conmutando ahora los operadores dagados en el primero y los operadores si dagar en el segundo obtenemos

$$
\begin{aligned}
(a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}-\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{k}'+\mathbf{p}} a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}} + a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} a^\dagger_{\mathbf{p}'-\mathbf{p}} a_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'} \\
+ a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}-\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{k}} + a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} a^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{p}} a_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} a_{\mathbf{k}'})\,.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Hagamos notar que $\mathbf{k}$ y $\mathbf{q}$ están fijados por el operador de una partícula $a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}}$ y que la suma será sobre $\mathbf{k}'$, $\mathbf{p}'$ y $\mathbf{p} \neq 0$ donde el coeficiente que multiplica sólo depende de $\mathbf{p}$, además en los términos donde aparece $\mathbf{k}'$ no aparece $\mathbf{p}'$ y viceversa. A cada $\mathbf{p}$ dado, varían $\mathbf{k}'$ y $\mathbf{p}'$ pasando por todos los momentos, por lo tanto (comparar el primer término con el tercero, y el segundo con el cuarto) podemos poner $\mathbf{k}' \to \mathbf{p}'$ en el primer término (que resulta igual al tercero) y en el cuarto término (que resulta igual al segundo), con lo cual la ec. (13) resulta

$$
\begin{aligned}
\textstyle\sum_{\mathbf{k}',\mathbf{p}',\mathbf{p}\neq 0} \frac{iV_p}{2\hbar} [a^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{k}'}, a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}}] = \\
\textstyle\sum_{\mathbf{p}',\mathbf{p}\neq 0} \frac{iV_p}{\hbar} (a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}-\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{k}} + a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} a^\dagger_{\mathbf{p}'-\mathbf{p}} a_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'})\,.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

O lo que es lo mismo

$$
\frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}_2, a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}}] = \sum_{\mathbf{p}',\mathbf{p}\neq 0} \frac{iV_p}{\hbar} (a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}-\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{k}} + a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} a^\dagger_{\mathbf{p}'-\mathbf{p}} a_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'})\,, \tag{17}
$$

que es la otra parte (junto con lo mostrado en (10)) de la expresión del miembro derecho de la ec. (3).

Finalmente, si en la ecuación (3) tenemos en cuenta que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, con las expresiones mostradas en (4) y (5), y los resultados obtenidos en (10) y (17), se tiene

$$
\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt} a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}} = i(\,\epsilon_{k-q} - \epsilon_k) a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}} + \\
\textstyle\sum_{\mathbf{p}',\mathbf{p}\neq 0} \frac{iV_p}{\hbar} (a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}-\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{k}} + a^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} a^\dagger_{\mathbf{p}'-\mathbf{p}} a_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'})\,.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Por lo tanto se tiene para el valor esperado del operador $a^{\dagger}_{\mathbf{k-q}}a_{\mathbf{k}}$ la siguiente ecuación que da su evolución en el tiempo:

$$\frac{d}{dt}\langle a^{\dagger}_{\mathbf{k-q}}a_{\mathbf{k}}\rangle = i(\,\epsilon_{k-q}-\epsilon_{k})\langle a^{\dagger}_{\mathbf{k-q}}a_{\mathbf{k}}\rangle + \\ \textstyle\sum_{\mathbf{p'},\mathbf{p}\neq 0}\frac{iV_p}{\hbar}(\langle a^{\dagger}_{\mathbf{k-q-p}}a^{\dagger}_{\mathbf{p'+p}}a_{\mathbf{p'}}a_{\mathbf{k}}\rangle + \langle a^{\dagger}_{\mathbf{k-q}}a^{\dagger}_{\mathbf{p'-p}}a_{\mathbf{k-p}}a_{\mathbf{p'}}\rangle)\,, \quad (19)$$

y que corresponde a la ecuación (8.8) del libro de Haug y Koch.