

Guia 4: Plasmones - Ej. 3

18 de junio de 2021

Recordemos que estamos tratando de analizar el comportamiento de las excitaciones del plasma de electrones y para eso es importante conocer que pasa con la dinámica de la densidad de carga. Recordemos que la densidad de carga es un operador que en espacio real se escribe como:

$$\hat{\rho}_e(\mathbf{r}) = -|e| \sum_s \psi_s^\dagger(\mathbf{r}) \psi_s(\mathbf{r}) \quad (1)$$

donde los operadores de campo dan cuenta de la creación o destrucción de un electrón con spin s en la posición \mathbf{r} . Utilizando que los operadores de campo se pueden escribir en una base de ondas planas:

$$\psi_s(\mathbf{r}) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k},s} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (2)$$

la densidad de carga se escribe como:

$$\rho_e(\mathbf{r}) = -\frac{|e|}{L^3} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', s} a_{\mathbf{k}',s}^\dagger a_{\mathbf{k},s} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} \quad (3)$$

Tomando la transformada de Fourier:

$$\rho_{e,\mathbf{q}} = -\frac{|e|}{L^3} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', s} a_{\mathbf{k}',s}^\dagger a_{\mathbf{k},s} \int \frac{d^3r}{L^3} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} = -\frac{|e|}{L^3} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', s} a_{\mathbf{k}',s}^\dagger a_{\mathbf{k},s} \underbrace{\int \frac{d^3r}{L^3} e^{i(\mathbf{k}-(\mathbf{k}'+\mathbf{q}))\mathbf{r}}}_{=\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'+\mathbf{q}}=\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}'}} \quad (4)$$

$$\implies \rho_{e,\mathbf{q}} = -\frac{|e|}{L^3} \sum_{\mathbf{k}, s} a_{\mathbf{k}-\mathbf{q},s}^\dagger a_{\mathbf{k},s} \implies \boxed{\langle \rho_{e,\mathbf{q}} \rangle = -\frac{|e|}{L^3} \sum_{\mathbf{k}, s} \langle a_{\mathbf{k}-\mathbf{q},s}^\dagger a_{\mathbf{k},s} \rangle} \quad (5)$$

El comportamiento dinámico de la densidad de carga, que es un fenómeno colectivo de todos los electrones, se encuentra tomando una derivada temporal de la expresión anterior:

$$\frac{d}{dt} \langle \rho_{e,\mathbf{q}} \rangle = -\frac{|e|}{L^3} \sum_{\mathbf{k}, s} \frac{d}{dt} \langle a_{\mathbf{k}-\mathbf{q},s}^\dagger a_{\mathbf{k},s} \rangle \quad (6)$$

Una forma de encontrar esta cantidad es pensar en la representación de Heisenberg, ya que de esa forma es fácil conseguir la evolución temporal de los operadores:

$$\frac{d}{dt} a_{\mathbf{k}-\mathbf{q},s}^\dagger a_{\mathbf{k},s} = \frac{i}{\hbar} [H, a_{\mathbf{k}-\mathbf{q},s}^\dagger a_{\mathbf{k},s}] \quad (7)$$

En el ejercicio 2 vimos que esta expresión se reduce a (omitimos el subíndice del spin):

$$\frac{d}{dt} a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}} = i(\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}}) a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{i}{\hbar} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}-\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}'-\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'} \quad (8)$$

Como en la representación de Heisenberg los estados son constantes en el tiempo y la evolución es de los operadores, se puede tomar valor medio saltando la derivada temporal. Por lo tanto:

$$\frac{d}{dt} \langle a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \rangle = i(\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}}) \langle a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \rangle + \frac{i}{\hbar} \sum_{p,p'} \langle a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}-\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}}^\dagger a_{p'} a_{\mathbf{k}} \rangle + \langle a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}'-\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} a_{p'} \rangle \quad (9)$$

La derivada de dos operadores depende de 4 y si se quiere plantear como evolucionan estos últimos, dependerán de 6 y así sucesivamente. Por lo tanto, para analizar algo de física es necesario tomar una aproximación; en este caso usaremos la aproximación de fases aleatorias (Random Phase Approximation). La aproximación consiste en suponer que la dependencia temporal del valor medio esta dominada por:

$$\langle a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}'} \rangle \sim e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})t} \quad (10)$$

Estas expresiones aparecen dentro de sumas, por lo que se evalúan expresiones del tipo:

$$\sum_{k,k'} e^{i(\omega_k - \omega_{k'})t} \quad (11)$$

Estas expresiones oscilan rápidamente para distintos números de onda, solo domina el término $k = k'$.

Para realizar el cálculo, estamos eligiendo un cierto valor de k específico a tener en cuenta en la suma y se tiran las demás contribuciones. Así, se tiene que los términos que debemos aproximar son:

$$T_1 = V_q p \text{fraci} \hbar \sum_{p,p'} \langle a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}-\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}}^\dagger a_{p'} a_{\mathbf{k}} \rangle \quad (12)$$

$$T_2 = V_p \frac{i}{\hbar} \sum_{p,p'} \langle a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}'-\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} a_{p'} \rangle \quad (13)$$

1. Lo primero que hacemos es elegir que $p = -q$ y usar que $V_{-q} = V_q$, se tiene:

$$T_1 \cong V_q \frac{i}{\hbar} \sum_{p'} \langle a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{p}'-\mathbf{q}}^\dagger a_{p'} a_{\mathbf{k}} \rangle \quad (14)$$

En ambos cálculos se usara que los operadores de creación/destrucción anticonmutan entre ellos ($\{a_i^\dagger, a_i\} = 0$). En el primer término podemos escribir:

$$T_1 = \frac{i}{\hbar} V_q \sum_{p'} \langle a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{p}'-\mathbf{q}}^\dagger a_{p'} a_{\mathbf{k}} \rangle = -\frac{i}{\hbar} V_q \sum_{p'} \langle a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{p}'-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}} a_{p'} \rangle \quad (15)$$

Ahora, utilizamos que los operadores de creación y destrucción anticonmutan a una delta:

$$\{a_i^\dagger, a_j\} = \delta_{i,j} \implies a_i^\dagger a_j = \delta_{i,j} - a_j a_i^\dagger \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \implies -\frac{i}{\hbar} V_q \sum_{p'} \langle a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{p}'-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}} a_{p'} \rangle &= -\frac{i}{\hbar} V_q \sum_{p'} \langle a_{\mathbf{k}}^\dagger (\delta_{\mathbf{p}'-\mathbf{q},\mathbf{k}} - a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{p}'-\mathbf{q}}^\dagger) a_{p'} \rangle = \\ &= -\frac{i}{\hbar} V_q \sum_{p'} \delta_{\mathbf{p}',\mathbf{k}+\mathbf{q}} \langle a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{p'} \rangle + \frac{i}{\hbar} V_q \sum_{p'} \langle a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{p}'-\mathbf{q}}^\dagger a_{p'} \rangle \end{aligned} \quad (17)$$

Definimos la función de distribución como el valor medio del operador numero de partículas:

$$\langle \hat{n}_{\mathbf{k}} \rangle = \langle a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \rangle = f_{\mathbf{k}} \quad (18)$$

Contrayendo la delta en el primer término, resulta que:

$$T_1 = -\frac{i}{\hbar} V_q \langle a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \rangle + \frac{i}{\hbar} V_q f_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}} \langle a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \rangle \quad (19)$$

2. Para el segundo término, elegimos $\mathbf{p} = \mathbf{q}$:

$$T_2 \cong V_q \frac{i}{\hbar} \sum_{p'} \langle a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}'-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} a_{\mathbf{p}'} \rangle \quad (20)$$

Anticonmutando el segundo y tercer operador:

$$T_2 \cong V_q \frac{i}{\hbar} \sum_{p'} \langle a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger (\underbrace{\delta_{\mathbf{p}'-\mathbf{q}, \mathbf{k}-\mathbf{q}}}_{=\delta_{\mathbf{p}', \mathbf{k}}} - a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} a_{\mathbf{p}'-\mathbf{q}}^\dagger) a_{\mathbf{p}'} \rangle = V_q \frac{i}{\hbar} \langle a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \rangle - V_q \frac{i}{\hbar} f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \sum_k \langle a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \rangle \quad (21)$$

Juntando las dos expresiones, llegamos al resultado que queremos:

$$\frac{d}{dt} \langle a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \rangle = i(\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}}) \langle a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \rangle + \frac{i}{\hbar} V_q (f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) \sum_k \langle a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \rangle \quad (22)$$