

Temas avanzados de termodinámica y física estadística – 1er. cuatrimestre de 2013

Guía 4: Teoría de grandes desviaciones

Dadas N variables aleatorias X_i , independientes e idénticamente distribuidas, se define el promedio,

$$S_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i.$$

1. Calcular la probabilidad, o la densidad de probabilidad, según se trate, de S_N en los siguientes casos:

- Variable aleatoria binaria, con $X \in \{-1, 1\}$, $P(X = -1) = \alpha$ y $P(X = 1) = \beta$.
- Variable con tres estados posibles, $X \in \{-1, 0, 1\}$, $P(X = -1) = P(X = 0) = P(X = 1)$.
- Variable gaussiana, con densidad $p(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp[-(x - \mu)^2/(2\sigma^2)]$.
- Variable aleatoria con densidad exponencial, $p(x) = \alpha e^{-\alpha x}$.

2. Para los casos anteriores, calcular cómo se comporta la probabilidad de S_N para $N \gg 1$. Verificar que el comportamiento está dominado por un término exponencial con exponente proporcional a N ,

$$P(s) \sim e^{-NI(s)},$$

donde $P(s)$ es la probabilidad o la densidad de probabilidad, según sea el caso discreto o continuo. Escribir y graficar $I(s)$ en cada caso. (*Sugerencia:* en los dos casos discretos, usar la aproximación de Stirling. En particular, en el caso (b), donde la probabilidad queda escrita como una suma, encontrar el término que domina la suma y quedarse con ese solo término; graficar el término general de la suma para convencerse de que para $N \gg 1$ sólo ese término importa.)

3. Como verificación del teorema central del límite, en cada caso desarrollar $I(s)$ alrededor de su mínimo y obtener la gaussiana que aproxima la probabilidad para desviaciones *normales*, por contraste con *grandes*.
4. Para los casos anteriores, obtener $I(s)$ mediante la transformada de Legendre del funcional generador, a través de la relación

$$I(s) = \max \{sJ - W(J)\},$$

válida siempre que $I(s)$ sea una función convexa. Aquí

$$W(J) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \langle e^{NS_N J} \rangle.$$

Verificar que los resultados obtenidos mediante este método coinciden con los obtenidos antes por cálculo directo.