ESTRUCTURA DE LA MATERIA 4

PRIMER CUATRIMESTRE DE 2017

NOTAS Y EJERCICIOS SOBRE GRUPOS Y ALGEBRAS DE LIE

Estas notas pretenden ampliar con comentarios y ejercicios lo visto en la clase práctica, donde se dió un panorama de los grupos y álgebras de Lie relevantes para la materia, junto con la noción de representación y producto de ellas.

Definición de grupo: un grupo es un conjunto no vacio G, junto con una operación binaria $*$, tal que:

1. $g_1 * g_2$ esta en G para todo g_1 y g_2 en G,
2. $*$ es asociativa. Es decir, $g_1 * (g_2 * g_3) = (g_1 * g_2) * g_3$ (se puede entonces eliminar el parentesis, sin lugar a ambiguedad)
3. Existe un elemento identidad y es único. Es decir, existe un elemento e tales que $g * e = e * g = g$ para todo g
4. Todo elemento g tiene un inverso, único (denotado por g^{-1}). Es decir, para todo g existe un g^{-1} tal que $g^{-1} * g = g * g^{-1} = e$

Aclaración: las condiciones anteriores son redundantes. Es decir, se pueden pedir algo más débil que lo anterior, y deducir la lista anterior a partir de esta lista reducida. Esta versión reducida la pueden encontrar en wikipedia o de cualquier otra fuente. En estas notas preferí escribir una lista redundante, con *excesos de verdades*, a fin de facilitar la resolución de los ejercicios.

Observe que no se requiere que la operación binaria tenga que ser *conmutativa*. Por tanto, importa el orden en el producto. Cuando es conmutativa, se dice que el grupo es *abeliano*.

El grupo G puede contener tanto un numero finito como infinito (numerable o no numerable) de elementos. Existen muchisimos ejemplos familiariares de estructuras de grupo. Para mencionar algunos:

- Los numeros enteros con la operación de suma.
- Los racionales o reales o complejos distintos de cero con la operación de multiplicación.
- El conjunto de todas las matrices de $n \times n$ inversibles (es decir, aquellas con determinante distinto de cero) con la operación de producto de matrices.

Note que debe especificarse siempre la operación binaria además del conjunto. Sin la especificación de la operación, no tenemos aún la estructura de grupo. Es intructivo pensar en estructuras similares que no sean grupo, cambiando el conjunto y/o la operación. Por ejemplo: los enteros distintos de cero, con la multiplicación usual, no forman un grupo. En un momento de ocio, seria intructivo jugar con distintas posibilidades.

Cuando el grupo es finito, puede confeccionarse (en un tiempo finito!) una tabla indicando lo que da el producto de dos elementos cualesquiera. Esta se llama *tabla de multiplicar* y corresponde a lo que uno hace cuando escribe la tabla del 1 al 9 (salvo que en este caso no estamos ante una estructura de grupo). La noción de tabla de multiplicar aplica también a los grupos infinitos, aunque sea necesaria la vida eterna (o tampoco sea esta suficiente) para confeccionarla. Dar la tabla de multiplicar es especificar la regla para asignar a un par g_1 y g_2 el resultado $g_1 * g_2$. Por ejemplo, el grupo de matrices inversibles contiene infinitos (no numerables) elementos pero la tabla ya esta dada. Porque si tenemos un par de matrices determinadas, ya esta determinado su producto. Es decir, una vez especificada la operación $*$ ya esta inevitablemente dada la tabla de multiplicar.

Los grupos que consideraremos en la materia son todos grupos de una clase especial denominados *grupos de Lie*. El *de Lie* no es una muletilla sino que agrega una estructura adicional a la de grupo: la estructura de variedad diferenciable. Esto va muchisimo mas alla del alcance de este curso.

Ejercicios sobre grupos finitos

1. Confeccione la tabla de multiplicar de grupos finitos de 2 y 3 elementos. Es decir, proponga como llenar la tabla, que en el ejemplo de 3 elemento sería

	a	b	c
a			
b			
c			

   , de tal forma que se verifiquen las propiedades que definen un grupo.

2. Verifique que las siguiente tabla de multiplicar para un grupo de 4 elementos respetan la definición de grupo:

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

3. Muestre que la tabla del ejercicio anterior corresponde al grupo de rotaciones que dejan invariante un cuadrado. Identifique cada elemento b, b, c, d con una rotación. Muestre además que el grupo de transformaciones en R^2 formado por la identidad, las reflexiones respecto a los ejes coordenados, y la inversión respecto al origen tiene una tabla de multiplicar diferente. (de hecho, las tablas de los dos ejercicios precedentes son las únicas posibles en un grupo de 4 elementos. Esto puede verificarse intentando llenarlas de otra forma)

Grupos de infinitos elementos: $U(n)$, $SU(n)$, $SO(n)$

4. El grupo $U(n)$ se define como el grupo de matrices de $n \times n$, de coeficientes complejos, que cumple la condición de unitariedad, es decir, esta formado por matrices M tales que $M^\dagger = M^{-1}$. Muestre que este conjunto es un grupo con la operación de multiplicación de matrices. Haga lo mismo para el caso de $SU(n)$ definido como aquellas de $U(n)$ que tienen determinante igual a 1.

5. Muestre que una matriz de la forma

$$e^{i\alpha} \begin{pmatrix} cos(\theta)e^{i\beta} & sen(\theta)e^{i\gamma} \\ -sen(\theta)e^{-i\gamma} & cos(\theta)e^{-i\beta} \end{pmatrix}$$

con α, β, γ reales, es una matriz de $U(n)$. Muestre ademas que estas son todas.

6. Muestre que el grupo $U(1)$ es *isomorfo* al grupo $SO(2)$ (matrices de 2×2 ortogonales de determinante igual a 1). Es decir, muestre que hay una correspondencia 1-1 entre ambos que respeta la estructura de grupo.

7. Argumente porque la dimensión del grupo $U(n)$ y $SU(n)$ (entendida simplemente como la cantidad de parámetros reales libres) es n^2 y $n^2 - 1$.

Representaciones de grupo: una adecuada introducción a este tema requeriría mucho mas espacio. De forma muy vaga la idea de la representación es bajar a tierra al grupo, asignando a cada elemento del grupo (que puede no estar formado por matrices) una transformación lineal en un espacio vectorial. Esta transformación lineal tiene desde ya una matriz asociada. De modo que en la representación asignamos a un elemento del grupo G una matriz cuadrada de rango n, siendo este n la dimensión del espacio vectorial elegido, en principio arbitraria. Asi que podemos tener una representación de $SU(2)$ de dimension 80, aunque las matrices de $SU(2)$ son de 2×2. Me limitaré a mencionar que para hablar de representación de un grupo necesitamos:

- Un espacio vectorial V de dimensión D (nos limitaremos a espacios vectoriales en los reales o complejos)

- Una asignación de cada elemento g del grupo G a una transformación lineal de V.

Esta asignación podemos denotarla como ρ, de tal forma que $\rho(g)$ es una matriz de $D \times D$ que implementa una transformación lineal en V. Aun cuando G es un grupo de matrices, ρ hace algo no trivial, dado que asigna otra matriz (de incluso de otra dimensión). Ahora bién, no cualquier asignación recibiría el nombre de representación. Lo que debería pasar es:

- i)$\rho(g_1 * g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2)$

- ii) $\rho(identidad) =$ matriz identidad.

Aclaración: si bién el término *representación* aplica a la asignación ρ, por abuso de lenguage a veces se aplica al espacio vectorial V. Pero es importante que quede claro que V en si no tiene ninguna información del grupo. Por ejemplo, si V es un espacio de dimensión 2 este es el R^2 de toda la vida. Si hallamos alguna representación de un grupo asignando matrices que actén en R^2, es esa asignación la que tendrá información del grupo.

Note que siempre existe una representación tonta, la trivial, que consiste en asignar a cada g la matriz identidad de rango $D \times D$. Puede verificar que esta ρ cumple con todo lo anterior.

Una forma de hallar representaciones de un dado grupo de matrices de dimensión D (ejemplo, $SU(2)$, que contiene matrices de dimensión 2) es arrancar con la representacíon natural que consiste en asignar a cada matriz del grupo una transformación lineal dada por su propia matriz!. A veces a esta se la denomina *representación fundamental*. En el caso de $SU(2)$ esta representación obvia consistiria en asignar a cada matriz de $SU(2)$ una transformación lineal, en un espacio vectorial de dimensión 2 en los complejos, dado por su porpia matriz. Es decir, $\rho(g) = g$. A partir de esta representación, se pueden construir otras, de dimensión mas grande, haciendo *productos de representaciones* de este tipo.

Un ejemplo familiar de producto de representaciones aparece en el tensor de inercia que puede definirse para una sola partícula incluso. En este ejemplo, uno tiene a su disposición el vector posición de una partícula que corresponde a una representación de dimensión 3 del grupo de rotaciones. El tensor de inercia se obtiene multiplicando las componentes del vector posición en todas las formas posibles. Es decir, haciendo un producto tensorial entre representaciones del grupo de rotaciones. Este objeto esta en una representación del grupo de rotaciones de dimensión más grande que 3. Los ejercicios siguientes tienen como finalidad bajar a tierra esta noción.

8. Escriba la matriz de 4×4 que realiza una transformación de $SU(2)$ en el producto de dos representaciones de dimensión 2 de la misma.

9. Muestre que esta representación de 4×4 se parte en dos, una de dimensión 3 y otra de dimensión 1. (ayuda: si se denota por e_1 y e_2 a los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$, la primera representación se obtiene restingiendose al subespacio generado por e_1e_1, $e_1e_2 + e_2e_1$ y e_3e_3, y la segunda esta generada por $e_1e_2 - e_2e_1$. Muestre que estos subespcios quedan invariantes ante la acción de $SU(2)$)

Álgebras de Lie

Menos espacio aún dedicaremos a la noción de algebra de Lie. Ese sera objeto de otras notas. Por el momento, solo nos limitaremos a obervar que para los grupos de matrices de interés para esta materia (tales como $SU(2)$), que son grupos de Lie, vale que toda matriz del grupo puede escribirse como la exponencial de otra. Estas últimas matrices son entonces el logaritmo de las matrices del grupo. A fin de reproducir los infinitos elementos del grupo necesitamos recorrer por una familia de infinitas matrices en el exponente. Naturalemente, las matrices admisibles en el exponente estan limitadas por las condiciones que definen a las matrices del grupo.

Hay muchas diferencias entre la familia de matrices del exponente M y las del grupo e^M. La más obvia es que en el exponente está la matriz nula (cuya exponencial da la matriz identidad) mientras que esta no puede estar en el grupo (porque no sería inversible). Por otra parte, si uno multiplica dos matrices en el exponente, digamos, M_1 y M_2, siendo M_3 el resultado, no hay garantía de que e^{M_3} este en el grupo. Es decir, la operación de multiplicar matrices no preserva las propiedades requeridas para las matrices del exponente.

Dicho esto, si denotamos por $\mathscr{C}$ al conjunto de matrices admisibles en el exponente(es decir, la exponencial de cualquiera de esta cae en el grupo), este conjunto tiene algunas propiedades importantes:

1. Forman un espacio vectorial sobre los reales. Es decir, si M_1 y M_2 estan en $\mathscr{C}$, también lo estarán $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$, con λ_1 y λ_2 reales.

2. El conmutator entre dos matrices de $\mathscr{C}$ pertenece a $\mathscr{C}$.

El espacio vectorial $\mathscr{C}$ con la operación $[\,,]$ de conmutar forma no un grupo sino un *álgebra*. La operación de conmutar es una operación binaria, antisimétrica, que cumple una identidad conocida como *identidad de Jacobi* : $[M_1,[M_2,M_3]] + [M_3,[M_1,M_2]] + [M_2,[M_3,M_1]]$. Un álgebra, donde la operación de producto (en este caso, la operación de conmutar) cumple esas dos propiedades, se donomina *álgebra de Lie*. Note que, tal como ocurre en grupos, el espacio vectorial $\mathscr{C}$ no tiene porque estar formado por matrices ni la operación tiene por que ser conmutar nada. De todas formas, nos limitaremos a casos terrenales donde tenemos matrices con la operación de conmutar.

Así como la tabla de multiplicar (con la operación $*$ del grupo) define a un grupo, la tabla de multiplicar (con la operación conmutar) define el álgebra. Debido a que en el algebra de Lie trabajamos con un espacio vectorial, basta con escribir la lista de conmutadores entre todos los pares posibles de elementos de la base. Es decir, dar un álgebra de Lie es decir cuando valen todos los conmutadores $[M_i, M_j]$ (con $i, j = 1...D$, siendo D la diemensión del álgebra). Dado que el resultado tiene que caer en el espacio vectorial, entonces debe ser una combinación lineal de los elementos de la base. Entonces:

$$[M_i, M_j] = C_{ij}^k M_k \tag{1}$$

siendo los C_{ij}^k ciertos numeros reales sujetos a algunas condiciones no triviales (se entiende que hay suma en el indice repetido k). Estos coeficientes se llaman *constantes de estructura*, dado que determinan la estructura de álgebra.

Advertencias: para un grupo de matrices de Lie generico no es cierto que todo elemento del grupo sea el resultado de la exponencial de un álgebra. No se trata de ninguna sutileza. Grupos familiares como el de Lorentz no tienen esta propiedad. Aún así la función exponencial cubre una una porción importante de elementos del grupo que se encuentran proximos (en algun sentido preciso) al elemento identidad del grupo (el cual es la exponencial del cero).

Ejercicios elementales sobre algunas álgebras de Lie.

10. Halle las condiciones que la antisimetría del conmutador impone en las constantes de estructura. Halle las condiciones correspondientes que imponen las identidades de Jacobi. Si le resulta muy engorroso esto último, limitese a lerlas en algun lado. Nota: si usted propone algun conjunto de constantes de estructura que cumplen las dos condiciones mencionadas, entonces definió un álgebra de Lie.

11. Muestre que si las constantes de estructura son todas nulas, entonces el grupo correspondiente es abeliano (ayuda: vea en la literatura alguna propiedad del producto de exponenciales de matrices).

12. Suponga que decidió reescribir los elementos de la base M_i como λR_i siendo λ un numero complejo en general. Halle las nuevas constantes de estructura en la base de las R's en términos de las de la base de las M's. Vea que ocurre en el caso de que λ es imaginario puro y las constantes son reales.

13. Un elemento de $U(n)$ se puede escribir como e^{iA} siendo A una matriz de $n \times n$ (el factor i se eligio por conveniencia). Halle las condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir A para que e^{iA} sea una matriz de $U(n)$. Idem para el caso $SU(n)$

14. Para el caso $U(2)$ y $SU(2)$ halle una base para tales matrices.

15. Para el caso de $U(n)$ y $SU(n)$, verifique que las condiciones halladas para las matrices A se preservan ante la conmutación de matrices. Es decir, muestre que si A_1 y A_2 las cumplen, también lo haran $[A_1, A_2]$.

16. Verifique que las matrices de Gell-Mann cumplen las condiciones que garantizan que sus exponenciales dan matrices de $SU(3)$.

17. Halle la forma de los generadores del grupo $SO(3)$ (defina que es este grupo) en la representación de dimensión 3. Observe todas las diferencias con $SU(3)$.

18. Para el caso de $SU(2)$, halle explicitamente la forma de $e^{i\theta\frac{\sigma_3}{2}}$ y obtenga la forma de la matriz de la representación de dimensión 3 que aparece en el ejercicio 9.