Resolución ej 2 segundo parcial de Estrcutura 4

Resolución Solo voy a detenerme en la transformación de los campos de gauge:

$$W'_\mu = e^{ig\Lambda} W_\mu e^{-ig\Lambda} - \frac{i}{g}(\partial_\mu e^{ig\Lambda})e^{-ig\Lambda}$$

con $\Lambda(x) = \alpha\frac{\sigma_3}{2}$ y $W'_\mu \equiv W'^+_\mu J_+ + W'^-_\mu J_- + W'^3_\mu J_3$. A fin de hallar los campos primados, debemos hallar los coeficientes de J_+, J_- y J_3 en el miembro derecho. La idea del ejercicio es ver en un ejemplo concreto como transforman los campos de gauge asociados a un grupo no abeliano como el que aparece en el modelo estandard.

Vemos primero segundo término que contiene derivadas. Sustituyendo la expresion dada en la ayuda ($e^{i\theta\frac{\sigma}{2}} = \cos(\frac{\theta}{2})\mathbb{I} + i\,\mathrm{sen}(\frac{\theta}{2})\sigma_3$) se ve inmediatamente que

$$\boxed{\frac{i}{g}(\partial_\mu e^{ig\alpha\frac{\sigma_3}{2}})e^{-ig\alpha\frac{\sigma_3}{2}} = \partial_\mu\alpha\frac{\sigma_3}{2}} \tag{1}$$

Trabajemos el primer término, pasando la exponencial de la derecha por encima de W_μ[1], usando la identidad trivial $AB = BA + [A, B]$:

$$e^{ig\Lambda} W_\mu e^{-ig\Lambda} = e^{ig\Lambda}e^{-ig\Lambda}W_\mu + e^{ig\Lambda}[W_\mu, e^{-ig\Lambda}]$$

Ahora bién,

$[W_\mu, e^{-ig\Lambda}] = [W^+_\mu J_+ + W^-_\mu J_- + W^3_\mu J_3, \cos(\frac{g\alpha}{2})\mathbb{I} - i\,\mathrm{sen}(\frac{g\alpha}{2})\sigma_3] = i2\mathrm{sen}(\frac{g\alpha}{2})(W^+_\mu J_+ - W^-_\mu J_-)$ (como se ve, no tiene contribuciones en σ_3, sino solo en J_+ y J_-).

$$e^{ig\Lambda} W_\mu e^{-ig\Lambda} = W_\mu + i2sen(\frac{g\alpha}{2})e^{ig\alpha\frac{\sigma_3}{2}}(W^+_\mu J_+ - W^-_\mu J_-)$$

Nos falta ver como se escribe el producto $e^{ig\alpha\frac{\sigma_3}{2}}J_\pm$ en términos de los generadores. Para ello notar que [2]$J_3 J_\pm = \pm\frac{1}{2}J_\pm$

De modo que:

$$e^{ig\Lambda} W_\mu e^{-ig\Lambda} = W_\mu + i2sen(\frac{g\alpha}{2})[cos(\frac{g\alpha}{2})(W^+_\mu J_+ - W^-_\mu J_-) + isen(\frac{g\alpha}{2})(W^+_\mu J_+ + W^-_\mu J_-)]$$

Reagrupando, vemos que:

$$\begin{aligned} e^{ig\Lambda} W_\mu e^{-ig\Lambda} = {} & W^+_\mu[1 - 2sen^2(\frac{g\alpha}{2}) + i2sen(\frac{g\alpha}{2})cos(\frac{g\alpha}{2})]J_+ \\ & W^-_\mu[1 - 2sen^2(\frac{g\alpha}{2}) - i2sen(\frac{g\alpha}{2})cos(g\frac{\alpha}{2})]J_- \end{aligned}$$

Y usando identidades para el seno y coseno, vemos que:

[1]Recordemos que W_μ no es un número sino $W^+_\mu J_+ + W^-_\mu J_- + W^3_\mu J_3$ y por tanto no conmuta con la exponencial

[2]la omision de esta relación en la ayuda hizo que algunos no pudieran continuar esta parte del ejercicio. Por eso fuimos indulgentes en este item b) al corregir. Quienes reemplazaron la expresión matricial de las $J_\pm$ pudieron llegar al resultado correcto

$$\boxed{e^{ig\Lambda}W_\mu e^{-ig\Lambda} = e^{ig\alpha}W_\mu^+ J_+ + e^{-ig\alpha}W_\mu^- J_-} \tag{2}$$

Usando ecuaciones 2 y 1 vemos que:

$$\boxed{{W^{3}}'_\mu = W_\mu^3 + \partial_\mu \alpha} \tag{3}$$

$$\boxed{W'^{\pm}_\mu = e^{\pm ig\alpha}W_\mu^\pm} \tag{4}$$

Observaciones

- Los campos $W^\pm$ transforman como si fueran campos escalares complejos de cargas opuestas. En el modelo estandard la invariancia de gauge residual no es la asocociada a J_3 sino a una combinacion de esta con la hipercarga. Pero la cuenta seria similar y justifica porque estos campos (mediadores de la fuerza debil) son campos cargados con cargas ± 1. Noten que W_3, ante esta trasnformación de gauge particular, transformo como un campo abeliano.
- La cuenta es mas simple si nos limitamos al primer orden en α en el desarrollo de la exponencial, en cualquier instancia de esta cuenta (desde el mismo principio por ejemplo.). Esta fue la sugerencia que se dio durante el parcial

Transcribo abajo el enunciado.
Enunciado
Considere el siguiente Lagrangiano

$$\mathcal{L} = (D^\mu\Phi)^\dagger D_\mu\Phi - \frac{1}{4}Tr\ G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} - \lambda(\Phi^\dagger\Phi - v^2)^2$$

para un doblete de campos escalares $\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ acoplado a campos de gauge de $SU(2)$, siendo $D_\mu \equiv \partial_\mu - ig(W_\mu^3 J_3 + W_\mu^+ J_+ + W^- J_-)$; $G_{\mu\nu}$ es el tensor habitual asociado a un campo de gauge no abeliano; v es un parámetro real positivo. Ante una transformación de gauge los campos transforman como

$$\Phi' = e^{ig\Lambda}\Phi$$
$$W'_\mu = e^{ig\Lambda}W_\mu e^{-ig\Lambda} - \frac{i}{g}(\partial_\mu e^{ig\Lambda})e^{-ig\Lambda}$$

con $\Lambda(x) = \Lambda^a(x)J_a$, siendo Λ^a funciones arbitrarias del espacio tiempo. Aquí $W_\mu \equiv W_\mu^3 J_3 + W_\mu^+ J_+ + W_\mu^- J_-$.

1. Escriba explícitamente cómo cambian W_μ^3 y Φ luego de la transformación de gauge en el caso particular en que $\Lambda(x) = \alpha(x)J_3$.
2. Halle la transformación de los campos W_+ y W_- para ese mismo caso. En base a las expresiones halladas justifique la interpretación de los signos $\pm$ como cargas asociadas al grupo $U(1)$ generado por $J_3 = \frac{\sigma_3}{2}$.

3. Considere la teoría cuántica en la que el doblete de campos escalares adquiere un valor de expectación en vacio (*vev*) no nulo igual a $\frac{v}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Reescribiendo la derivada covariante en la base de las $\frac{\sigma^a}{2}$, muestre que los campos W_1, W_2 y W_3 adquieren masa y encuentre su valor. Muestre que el valor de la masa no depende del *vev* elegido, siempre que éste corresponda a un mínimo del potencial V.

Ayuda: i) $e^{i\theta\frac{\sigma}{2}} = \cos(\frac{\theta}{2})\mathbb{I} + i\,\mathrm{sen}(\frac{\theta}{2})\sigma_3$, $[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm$ ii) $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$, $(\sigma_i)^2 = \mathbb{I}$