

Estructura de la Materia 2

Clase 10 - Teoría

Docentes

Gustavo Grinblat, Andrea Barral, Tomás Bortolin, Agustina Casafuz

Departamento de Física, FCEN, UBA – 2do Cuatrimestre, 2020

Web: <http://materias.df.uba.ar/edlm2a2020c2>

Repaso

Modelo de Drude

- Los iones se encuentran fijos en la red y los e^- forman un gas. Los e^- pueden colisionar, y entre colisiones se mueven en línea recta. Ante la presencia de un campo externo \rightarrow Leyes de Newton.
- Probabilidad de colisión por unidad de tiempo: $1/\tau_c \rightarrow dt/\tau_c$ es la probabilidad de colisionar en dt .
- Las colisiones son eventos instantáneos que alteran la velocidad del e^- . Al colisionar, el e^- termaliza con el entorno y emerge en una dirección al azar con una velocidad determinada por la temperatura en el lugar de la colisión (estadística de MB).

Aplicamos una fuerza $\bar{f}(t)$:

$$\bar{p}(t + dt) \approx \left(1 - \frac{dt}{\tau_c}\right) [\bar{p}(t) + \bar{f}(t)dt] + \frac{dt}{\tau_c} [\bar{f}(t)dt]$$

Probabilidad de no colisionar entre t y $t+dt$

Probabilidad de colisionar entre t y $t+dt$

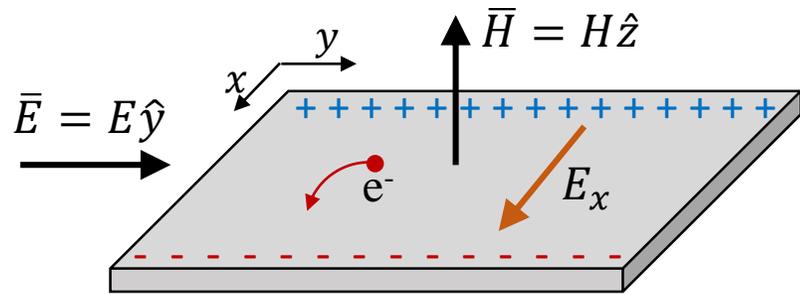
Cota superior

$$\xrightarrow{\text{A primer orden en } dt} \bar{p}(t + dt) = \bar{p}(t) + \bar{f}(t)dt - \frac{dt}{\tau_c} \bar{p}(t) \xrightarrow{\quad} \frac{\bar{p}(t + dt) - \bar{p}(t)}{dt} = \frac{d\bar{p}(t)}{dt} = \bar{f}(t) - \frac{\bar{p}(t)}{\tau_c}$$

Efecto Hall – Modelo clásico

Efecto Hall

Fuerza de Lorentz: $\vec{f} = -e \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H} \right) \rightarrow \frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \vec{f}(t) - \frac{\vec{p}(t)}{\tau_c} = -e \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H} \right) - \frac{\vec{p}(t)}{\tau_c}$



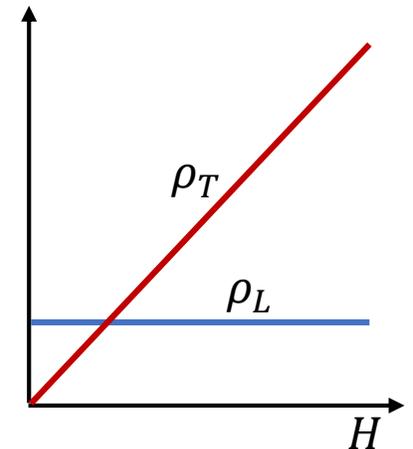
Estado estacionario ($d\vec{p}(t)/dt = 0$): $\vec{p} + e\tau_c \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H} = -e\vec{E}\tau_c$

$\vec{J} = -n_e e \vec{v} = -n_e e \frac{\vec{p}}{m} \rightarrow \vec{J} + \frac{e\tau_c}{m c} \vec{J} \times \vec{H} = \frac{e^2 n_e \tau_c}{m} \vec{E}$

$\rightarrow (J_x, J_y) + \frac{e\tau_c}{m c} (J_y H, -J_x H) = \sigma_0 \vec{E} \rightarrow (J_x, J_y) + \underbrace{\frac{eH}{m c}}_{\omega_c \tau_c} (J_y, -J_x) = \sigma_0 \vec{E}$

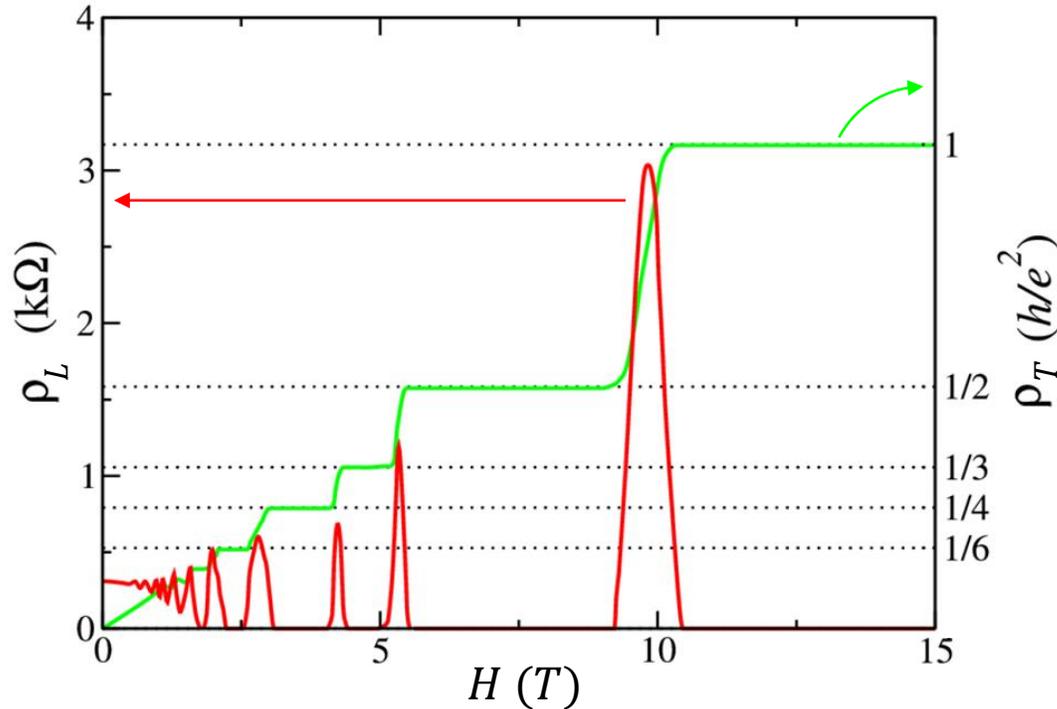
$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \omega_c \tau_c \\ -\omega_c \tau_c & 1 \end{pmatrix} \vec{J} = \sigma_0 \vec{E} \rightarrow \rho = \frac{1}{\sigma_0} \begin{pmatrix} 1 & \omega_c \tau_c \\ -\omega_c \tau_c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_L & \rho_T \\ -\rho_T & \rho_L \end{pmatrix}$

Coeficiente Hall: $R_H = \frac{\rho_T}{H} = \frac{\omega_c \tau_c}{\sigma_0 H} = \frac{1}{n_e e c}$



Efecto Hall Cuántico

Observaciones experimentales (gas bidimensional de electrones en heteroestructuras semiconductoras)



Experimentalmente se observa que ρ_T presenta mesetas planas en ciertos rangos de campo magnético.

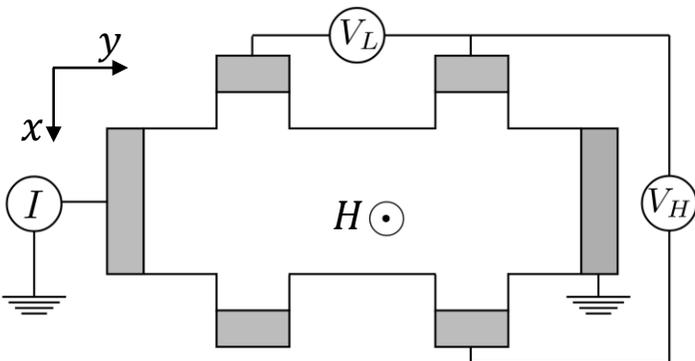
También se observa que ρ_L se anula en las mesetas de ρ_T .

En las mesetas, los valores de resistividad medidos son:

$$\rho_T = \frac{h}{e^2} \frac{1}{\nu} \quad \nu \in \mathbb{Z} \quad (\text{con un error de } 1 \text{ en } 10^9)$$

El centro de cada meseta ocurre cuando:

$$H = \frac{hcn_e}{ve} = \frac{n_e}{\nu \Phi_0} \quad \text{--- Cuanto de flujo}$$



¡El resultado es independiente del material, la pureza o geometría de la muestra!

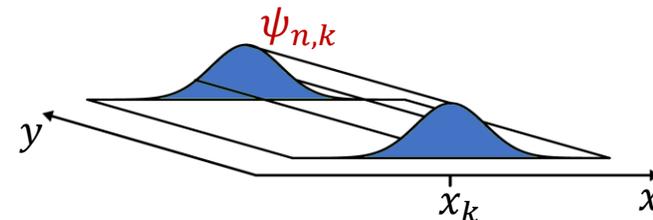
Efecto Hall Cuántico

Gas bidimensional de electrones libres en un campo magnético perpendicular uniforme

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{\left(\bar{p} + \frac{e}{c}\bar{A}\right)^2}{2m} \longrightarrow \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y} + \frac{e}{c}Hx\right)^2\right)\psi(\vec{r}) = \varepsilon\psi(\vec{r}) \\ \bar{A} &= (0, Hx) \quad (\text{Gauge de Landau}) \end{aligned} \right.$$

$$\longrightarrow \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - i\hbar x \underbrace{\omega_c}_{= eH/mc} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}m\omega_c^2 x^2\right)\psi(\vec{r}) = \varepsilon\psi(\vec{r}) \longrightarrow \text{Proponemos: } \psi(\vec{r}) = e^{iky}u(x)$$

$$\longrightarrow \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \underbrace{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \hbar k x \omega_c + \frac{1}{2}m\omega_c^2 x^2}_{\frac{1}{2}m\omega_c^2\left(x + \frac{\hbar k}{m\omega_c}\right)^2}\right)u(x) = \varepsilon u(x)$$



Niveles de Landau (ε_n independiente de k)

$$\longrightarrow \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega_c^2(x - x_k)^2\right)u(x) = \varepsilon u(x) \longrightarrow$$

(Oscilador armónico desplazado)

$$\psi_{n,k}(\vec{r}) = e^{iky} H_n\left(\frac{x - x_k}{l_H}\right) e^{-\frac{(x-x_k)^2}{2l_H^2}}$$

$$\varepsilon_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\hbar c/eH}$$

Efecto Hall Cuántico

Niveles de Landau (NL): Degeneración y llenado

Condiciones de contorno periódicas en \hat{y} (Lámina rectangular de lados L_x, L_y) $\rightarrow k = \frac{2\pi}{L_y} j, \quad j \in \mathbb{Z} \rightarrow \chi_k = -\frac{\hbar k c}{eH} = -\frac{2\pi \hbar c j}{eHL_y} \rightarrow 0 < -\frac{\hbar k c}{eH} < L_x$

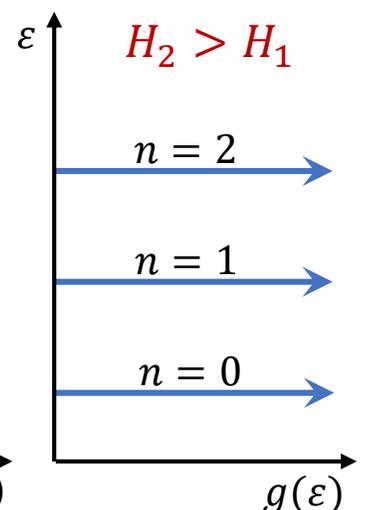
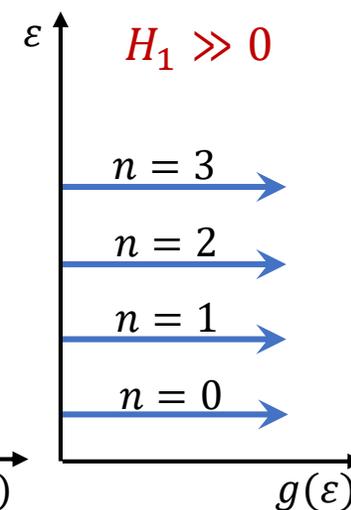
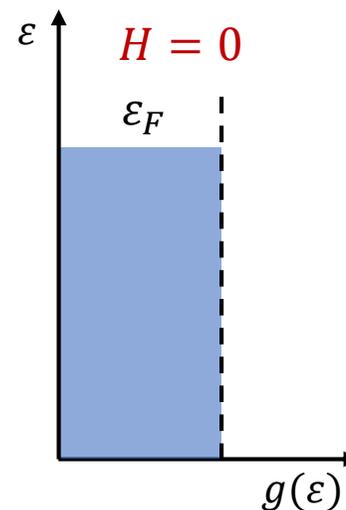
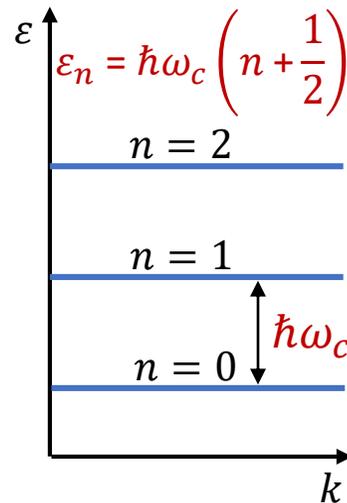
$\rightarrow -\frac{eHL_x L_y}{\hbar c} < j < 0 \rightarrow$ N° de estados por unidad de área en cada NL: $n_H = \frac{eH}{\hbar c}$

$\rightarrow n_H = \frac{H}{\Phi_0} \rightarrow$ N° de estados en un NL en una muestra de área S : $\frac{SH}{\Phi_0} = \frac{\Phi}{\Phi_0}$

Cada estado en un NL ocupa un área: $\frac{\hbar c}{eH} = 2\pi l_H^2 \rightarrow l_H \sim 25 \text{ nm} (H = 1 \text{ T})$

N° de NL ocupados: $\nu = \frac{n_e}{n_H} = \frac{\hbar c}{eH} n_e$

A medida que H crece, aumenta la cantidad de estados en cada NL y disminuye el N° de NL ocupados. ϵ_F se mueve de manera de mantener n_e constante.



Efecto Hall Cuántico

Niveles de Landau (NL): Degeneración y llenado

Condiciones de contorno periódicas en \hat{y} (Lámina rectangular de lados L_x, L_y) $\rightarrow k = \frac{2\pi}{L_y} j, \quad j \in \mathbb{Z} \rightarrow x_k = -\frac{\hbar k c}{eH} = -\frac{2\pi \hbar c j}{eHL_y} \rightarrow 0 < -\frac{\hbar c j}{eHL_y} < L_x$

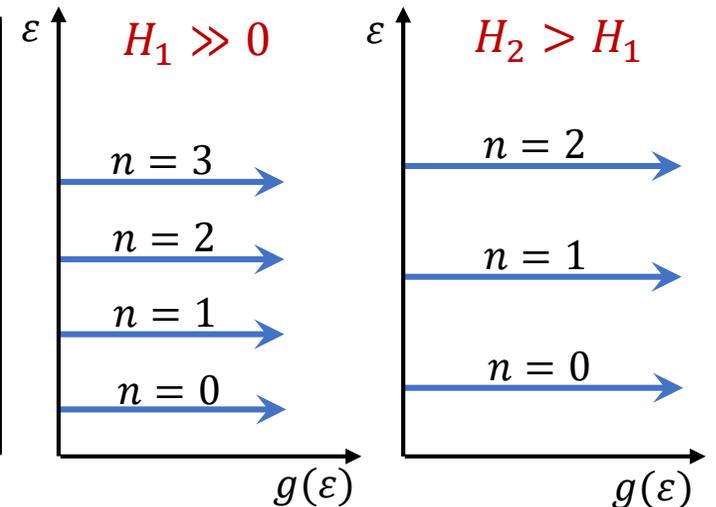
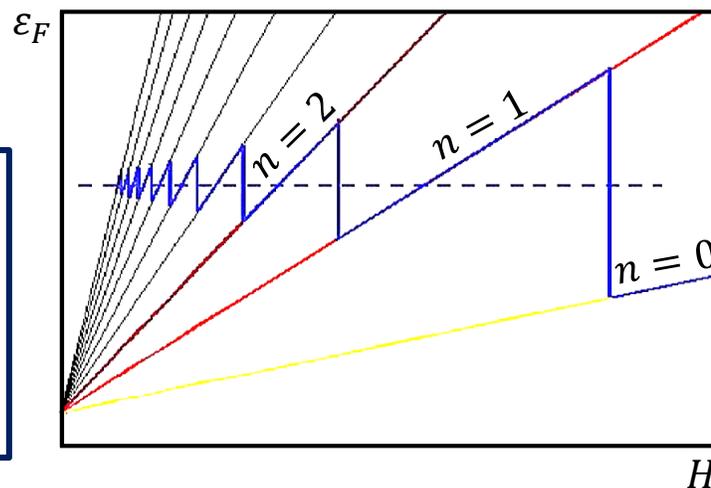
$\rightarrow -\frac{eHL_x L_y}{\hbar c} < j < 0 \rightarrow \text{N}^\circ \text{ de estados por unidad de área en cada NL: } n_H = \frac{eH}{\hbar c}$

$\rightarrow n_H = \frac{H}{\Phi_0} \rightarrow \text{N}^\circ \text{ de estados en un NL en una muestra de área } S: \frac{SH}{\Phi_0} = \frac{\Phi}{\Phi_0}$

Cada estado en un NL ocupa un área: $\frac{\hbar c}{eH} = 2\pi l_H^2 \rightarrow l_H \sim 25 \text{ nm } (H = 1 \text{ T})$

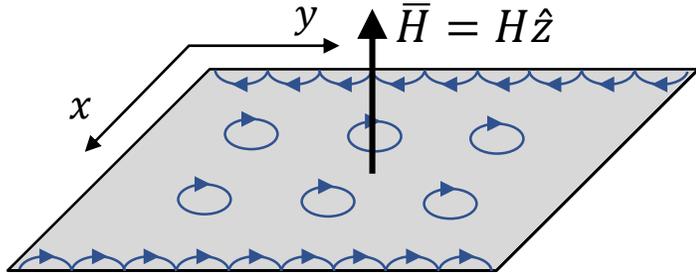
Nº de NL ocupados: $\nu = \frac{n_e}{n_H} = \frac{\hbar c}{eH} n_e$

A medida que H crece, aumenta la cantidad de estados en cada NL y disminuye el Nº de NL ocupados. ϵ_F se mueve de manera de mantener n_e constante.

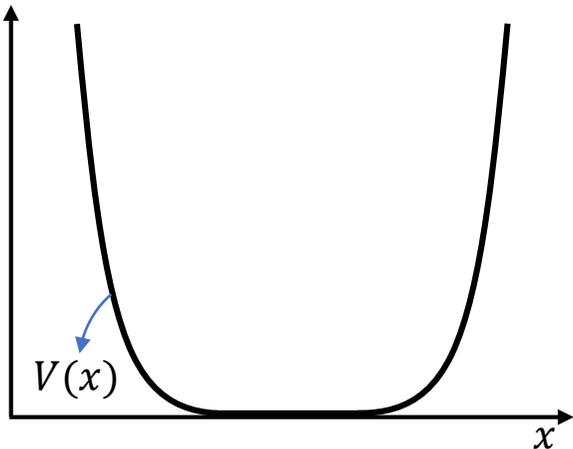


Efecto Hall Cuántico

Estados de borde: Potencial de confinamiento



En cada lado de la muestra los e^- se mueven en direcciones opuestas.



Introducimos un potencial de confinamiento en x : $\mathcal{H} = \frac{(\bar{p} + \frac{e}{c}\bar{A})^2}{2m} + V(x)$

$$\rightarrow \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + \frac{e}{c} Hx \right)^2 + V(x) \right) \psi(\vec{r}) = \varepsilon \psi(\vec{r})$$

$$\rightarrow \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - i\hbar x \overset{= eH/mc}{\omega_c} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2} m \omega_c^2 x^2 + V(x) \right) \psi(\vec{r}) = \varepsilon \psi(\vec{r})$$

→ Nuevamente, proponemos: $\psi(\vec{r}) = e^{iky} u(x)$

$$\rightarrow \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \hbar k x \omega_c + \frac{1}{2} m \omega_c^2 x^2 + V(x) \right) u(x) = \varepsilon u(x)$$

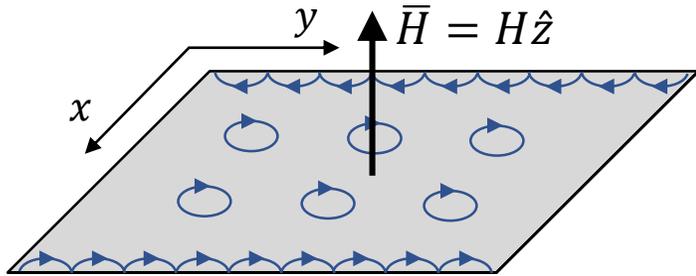
Suponemos que $V(x)$ varía lentamente en la escala de l_H , y expandimos en torno a x_k : $V(x) \approx x \frac{dV}{dx} \Big|_{x=x_k} + cte$

$$\rightarrow \mathcal{H}_k = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \hbar k x \omega_c + \frac{1}{2} m \omega_c^2 x^2 + \alpha_k x$$

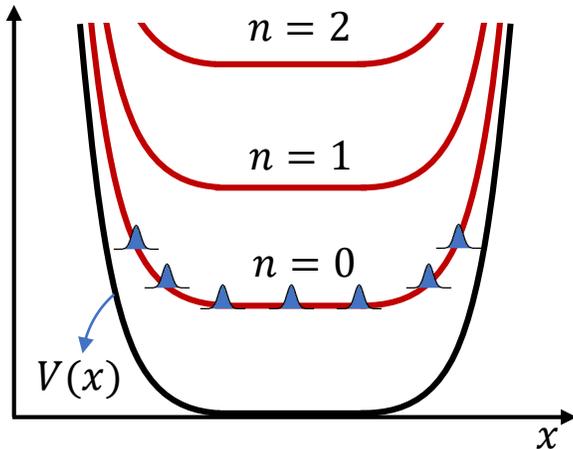
α_k

Efecto Hall Cuántico

Estados de borde: Potencial de confinamiento



En cada lado de la muestra los e^- se mueven en direcciones opuestas.



$$\begin{aligned} \mathcal{H}_k &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \hbar k x \omega_c + \frac{1}{2} m \omega_c^2 x^2 + \alpha_k x \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_c^2 \left(x + \frac{\hbar k \omega_c + \alpha_k}{m \omega_c^2} \right)^2 - \frac{(\hbar k \omega_c + \alpha_k)^2}{2m \omega_c^2} \end{aligned}$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega_c^2 \left(x - x_k + \frac{\alpha_k}{m \omega_c^2} \right)^2 - \alpha_k \left(\frac{\hbar k}{m \omega_c} + \frac{\alpha_k}{2m \omega_c^2} \right)$$

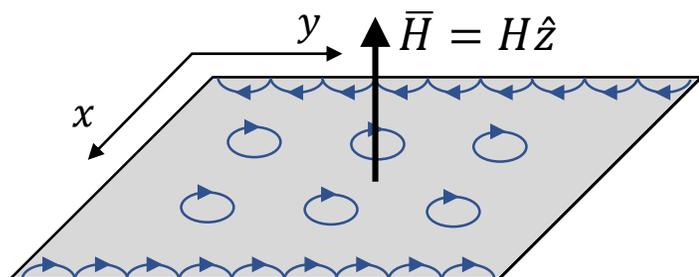
$$\varepsilon_{n,k} = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) - \alpha_k \left(k \frac{\hbar c}{eH} + \frac{\alpha_k}{2m \omega_c^2} \right); \quad \psi_{n,k}(\vec{r}) = \psi_{n,k}^{V=0} \left(x + \frac{\alpha_k}{m \omega_c^2}, y \right)$$

$$v_x = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial k_x}(\bar{k}) = 0; \quad v_y = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial k_y}(\bar{k}) = - \left(\frac{c}{eH} \right) \frac{dV}{dx} \Big|_{x=x_k} \quad (\text{Estados en cada borde viajan en sentido contrario.})$$

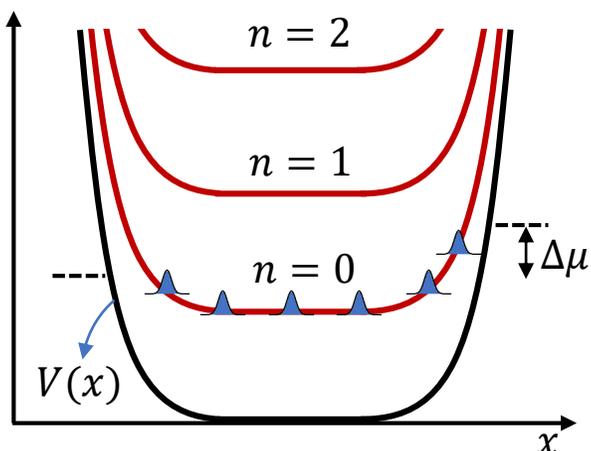
Encontramos estados de borde quirales, que se mueven en una única dirección en cada lado de la muestra. Son especiales porque son “inmunes” a impurezas. Un e^- en un estado quiral no puede ser redirigido en cualquier dirección a través de colisiones dado que todos los estados de borde se mueven en la misma dirección.

Efecto Hall Cuántico

Estados de borde: Conductividad



En cada lado de la muestra los e^- se mueven en direcciones opuestas.



Imponemos $\Delta\mu \neq 0$ entre los bordes y calculamos la corriente:

$$\begin{aligned} \bar{J} &= -\frac{e}{S} \sum_{\text{Estados ocupados}} \frac{1}{\hbar} \nabla_{\bar{k}} \varepsilon_n(\bar{k}) \longrightarrow J_x = -\frac{e}{S} \sum_{\text{Estados ocupados}} v_x(\bar{k}) = 0 \\ J_y &= -\frac{e}{S} \sum_{\text{Estados ocupados}} v_y(\bar{k}) = \frac{e}{S} \sum_{n=1}^{\text{Llenado entero}} \sum_k \left(\frac{c}{eH} \right) \frac{dV}{dx} \Big|_{x=x_k} = \frac{ev}{S} \sum_{x_k} \left(\frac{c}{eH} \right) \frac{dV}{dx} \Big|_{x=x_k} \\ &= \frac{ev}{S} \int \left(\frac{c}{eH} \right) \frac{dV}{dx} \left(\frac{L_y}{2\pi l_H^2} \right) dx = \frac{ev}{S} \left(\frac{c}{eH} \right) \left(\frac{eHL_y}{\hbar c} \right) \Delta\mu = \frac{1}{L_x} \frac{ev}{h} \Delta\mu \\ \longrightarrow I_y &= J_y L_x = \frac{ev}{h} eV_H \longrightarrow \rho_T = \frac{h}{e^2} \frac{1}{\nu} \end{aligned}$$

Como los estados que transportan corriente en \hat{y} se mueven a lo largo de equipotenciales $\longrightarrow \rho_L = 0$

¿Y si el llenado no es entero? En principio, un cambio infinitesimal en H elimina el llenado entero, ρ_T^{-1} deja de ser múltiplo entero de e^2/h , y ρ_L deja de ser nulo (existirán estados accesibles hacia los cuales los electrones podrán ser dispersados).

Efecto Hall Cuántico

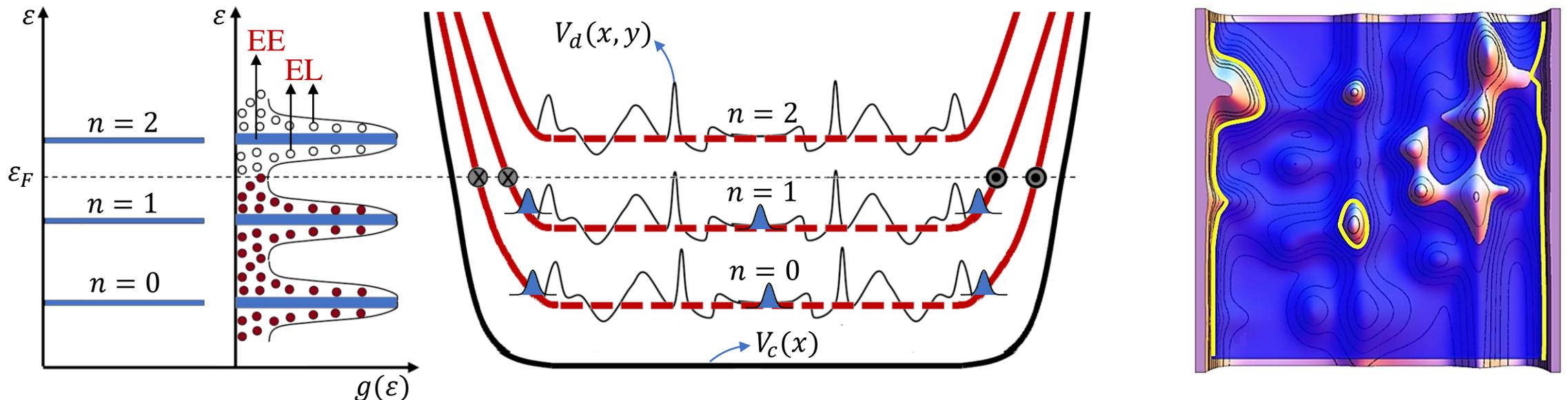
Influencia del desorden

El desorden destruye la simetría de traslación, rompiendo la degeneración en los niveles de Landau.

Suponiendo que:

- La magnitud del potencial agregado por desorden es menor a la separación entre niveles de Landau ($|V_d| < \hbar\omega_c$)
- El potencial varía apreciablemente solo en distancias mucho mayores a l_H ($|\nabla V_d| \ll \hbar\omega_c/l_H$).

—> Los centros de las órbitas se mueven en líneas equipotenciales, con estados localizados (EL) alrededor de picos y mínimos de V_d , y estados extendidos (EE) en valles de V_d y en los bordes de la muestra.



Efecto Hall Cuántico

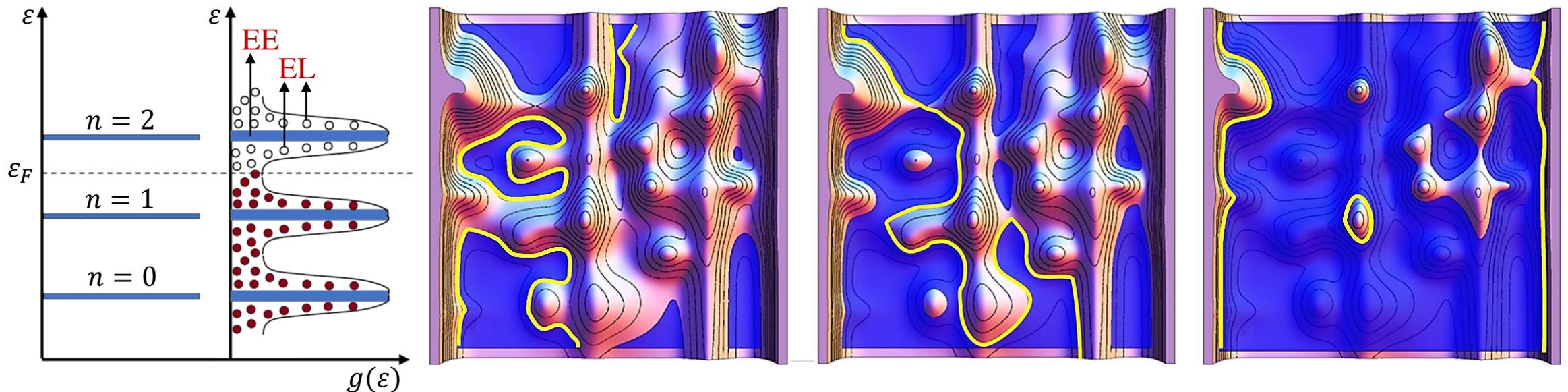
Influencia del desorden

El desorden destruye la simetría de traslación, rompiendo la degeneración en los niveles de Landau.

Suponiendo que:

- La magnitud del potencial agregado por desorden es menor a la separación entre niveles de Landau ($|V_d| < \hbar\omega_c$)
- El potencial varía apreciablemente solo en distancias mucho mayores a l_H ($|\nabla V_d| \ll \hbar\omega_c/l_H$).

—> Los centros de las órbitas se mueven en líneas equipotenciales, con estados localizados (EL) alrededor de picos y mínimos de V_d , y estados extendidos (EE) en valles de V_d y en los bordes de la muestra.



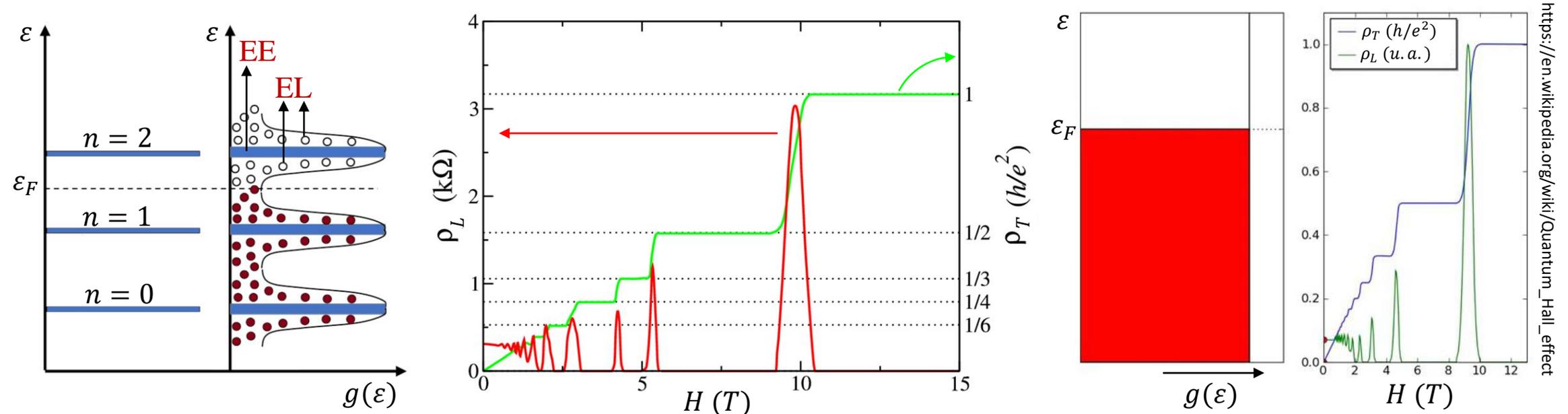
Efecto Hall Cuántico

Influencia del desorden

Los EE se encuentran en torno al centro de cada banda definida por los NL y son los que transportan corriente de un extremo a otro de la muestra. Los EL llenan los intervalos de energía entre regiones de EE.

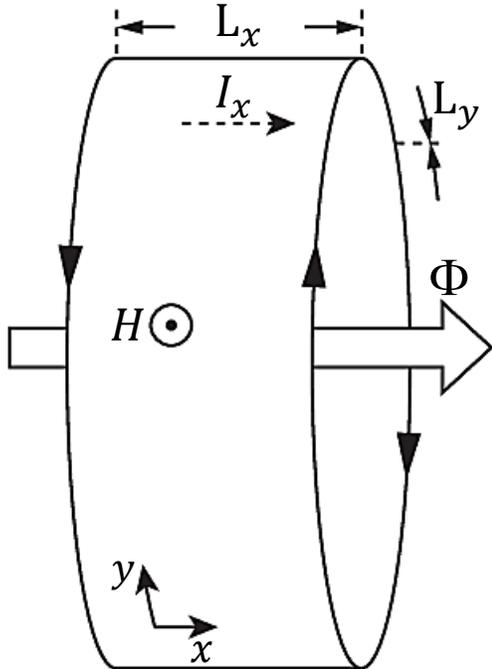
Como en determinados rangos de H solo cambia la ocupación de EL (que no contribuyen a la conductividad) y la población de EE permanece constante, aparecen mesetas en ρ_T vs H . Y, dado que cambios en la población de EE solo ocurren en intervalos muy reducidos de H , entre mesetas se observan saltos abruptos.

Como en una meseta los EE ocupados se encuentran lejos de ε_F , la ausencia de EE disponibles a energías cercanas anula ρ_L . Entre mesetas los e^- en EE sí pueden hacer *scattering*, produciendo picos en ρ_L .



Efecto Hall Cuántico

Argumento de Laughlin



$\Phi = \oint \bar{A}(\vec{r}) d\vec{r}$ (Teorema de Stokes: La integral de línea del vector potencial alrededor del cilindro es igual al flujo que lo atraviesa)

→ Puedo incluir el flujo Φ a través del cilindro tomando: $\bar{A} = (0, Hx + \Phi/L_y)$

$$\mathcal{H} = \frac{\left(\bar{p} + \frac{e}{c}\bar{A}\right)^2}{2m} \rightarrow \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y} + \frac{e}{c}Hx + \frac{e\Phi}{cL}\right)^2\right)\psi(\vec{r}) = \varepsilon\psi(\vec{r})$$

Resolviendo → $x_k = x_k^{\Phi=0} - \frac{\Phi}{\Phi_0} \frac{hc}{eHL_y} = \frac{hcj}{eHL_y} - \frac{\Phi}{\Phi_0} \frac{hc}{eHL_y} = \frac{hc}{eHL_y} \left(j - \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)$

Si se atraviesa $\Phi = \Phi_0$: $x_k^j \rightarrow x_k^{j-1}$ Se transfiere un e^- de un borde al otro para cada NL lleno. → $\rho_T = \frac{\partial\Phi}{\partial t} \frac{1}{I_x} = -\frac{\Phi_0}{T} \frac{T}{\Delta Q} = -\frac{hc/e}{-ve} = \frac{h}{e^2} \frac{1}{v}$ fem » $1/\omega_c$ (adiabático)

Si hay desorden, los EL no son alterados por Φ puesto que el mismo puede removerse con una transformación de *gauge*. Para los EE esto solo puede hacerse si $\Phi = l\Phi_0, l \in \mathbb{Z}$, porque deben ser univaluados al dar una vuelta completa alrededor del anillo ($\Delta\phi = 2\pi\Phi/\Phi_0$). El espectro de \mathcal{H} queda entonces sin alterar cuando $\Phi = l\Phi_0, l \in \mathbb{Z}$. Los EL no cambian, y los EE se mapean sobre sí mismos.

Resumen

- Efecto Hall y Efecto Hall Cuántico
- Niveles de Landau en un gas bidimensional de e^-
- Estados de borde y conductividad para ν entero
- Influencia del desorden
- Argumento de Laughlin e invariancia de *gauge*

