Estructura de la materia 4

Verano 2020

Práctica 2: Conservación de energía y momento relativistas

Los modelos que describen la fisica de partículas son cuanticos y relativistas. De la conjunción de la relatividad especial y la mecánica cuántica surgieron modelos que materializan la posibilidad de convertir la energía en reposo (en la famosa fórmula escrita como $E = mc^2$) en energía cinética y viceversa. Los ejercicios que siguen ayudarán a repasar nociones relativistas vistas en materias correlativas y ver las restricciones impuestas por las leyes de conservación de la energía y el momento, que se desprenden de una simetría exacta de la teoría cuantica relativista subyacente.

1. A partir de la definición del cuadrimomento $p^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau}$ de una partícula de masa m (siendo τ el tiempo propio asociado a una partícula en movimiento, $x^0 \equiv ct$, y $\mu = 0, \ldots, 3$):

   (a) Verifique el carácter de cuadrivector de esta cantidad. Es decir, que ante una transformación de Lorentz, p^μ transforma igual que las coordenadas espacio-temporales x^μ.

   (b) Escriba la expresión del momento y energía $E \equiv cp^0$ relativista de una partícula en términos de la masa m y velocidad $\mathbf{v}$ y derive a partir de ella las relaciones:
   $E^2/c^2 - |\,\vec{p}\,|^2 = m^2c^2 \qquad \vec{p} \;=\; E\frac{\mathbf{v}}{c^2}$.

   (c) Definiendo la energía cinética $T \equiv E - mc^2$, obtenga el límite no relativista de ésta.

   (d) Reescriba la primera relación en la forma $p^2 \equiv p^\mu p^\nu \eta_{\mu\nu} = m^2c^2$, siendo η la matriz diagonal de 4×4, con $\eta_{00} = 1$ y $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1$.

   (e) Obtenga las relaciones entre energía y momento para el caso $m = 0$ (donde la definición $p^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau}$ carecería de sentido). Verifique que esta relación es similar a las del caso masivo en el limite de velocidades cercanas a la de la luz.

   Nota: a partir de ahora usaremos $c = 1$.

2. Muestre que el cuadrimomento de una partícula se halla en una hipérbola determinada por la masa (grafique ésta). Muestre gráficamente que la suma de cuadrimomentos de dos partículas (cuadrivectores de tipo tiempo o luz) es de nuevo un cuadrivector de tipo tiempo o luz.

3. Muestre que que se tienen dos partículas de masa m_1 y m_2, la masa asociada al sistema compuesto de cuadrimomento total $p^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$ es mayor o igual que la suma $m_1 + m_2$, recuperándose la noción de aditividad de la masa en el límite de velocidades pequeñas. Ayuda: usando el resultado del item anterior, utilice el sistema de referencia en que el momento espacial total es nulo.

4. Usando conservación del cuadrimomento para un proceso $1 \to 2 + 3$ halle las relaciones (igualdades o desigualdades) que deben darse para las masas de las partículas involucradas para que el proceso sea posible.

5. Considere ahora un proceso del tipo $1 + 2 \to 3 + 4$. En este caso, no hay restriccion para las relaciones entre ls masas. A fin de ver esto, considere el caso simple en que $m_1 = m_2$ y $m_3 = m_4$ y halle las energias finales en terminos de las energias iniciales en el sistema centro de masa, verificando que siempre hay solución, sin importar la relación entre las masas finales e iniciales.

6. Considere una desintegración de un cuerpo en el estado inicial, a dos cuerpos en el estado final, i.e. $A \to BC$. Halle las energías de las partículas B y C en el sistema en que la partícula A se halla en reposo. Verifique que estas energías están unívocamente definidas por las masas de A, B y C.

7. En base al ejercicio anterior, reconsidere el análisis del decaimiento del neutrón en un electrón y un protón que llevó a suponer la existencia del neutrino discutido en la teorica. Es decir, vea cómo las energías del electrón y protón observadas experimentalmente muestran que debe haber una partícula adicional en el estado final.

8. A partir de lo anterior, calcule el impulso del muón en la desintegración $\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu$, suponiendo que el pión se encuentra inicialmente en reposo. Conociendo el tiempo de vida media del muón, ¿qué distancia recorrería este muón en el vacío (en promedio) antes de desintegrarse? Deje el resultado escrito en términos de las masas de las partículas involucradas y el tiempo de vida media del muón.

9. En una teoría relativista, un choque elástico entre dos partículas es definido como aquel en el que no cambia la identidad de las partículas. Es decir, $A + B \to A + B$. En este choque se conserva no solo la energía total sino la cinética. Muestre que en este tipo de colisión, en el sistema centro de masa, los módulos de las velocidades de cada partícula no cambian.

10. Decida si los procesos siguientes son posibles en base a leyes de conservación relativista:

    a) $e^- e^+ \to \gamma$ $b)$ $e^- e^+ \to \gamma + \gamma$

    siendo γ un fotón.

11.  Los primeros antiprotones fueron creados en el Bevatrón (Berkeley) en la reacción $pp \to pp p\bar{p}$. En tal caso se utilizó un haz de protones de energía E que colisiona con un blanco fijo de protones. Cuál debe ser la energía cinética mínima del protón incidente (uno de los dos pp) para que el proceso sea posible? Compare esta con la energía del proton incidente en el sistema centro de masa y diga cuál es mayor.

12. Considere el proceso elástico $\bar{\nu}_\mu + e^- \to \bar{\nu}_\mu + e^-$. Demuestre que en el sistema del laboratorio, donde el electrón se halla originalmente en reposo, el ángulo de emisión θ del electrón respecto del antineutrino incidente está dado por

$$\sin^2\theta = \frac{2m}{T+2m}\left(1 - \frac{T}{E_\nu} - \frac{mT}{2E_\nu^2}\right),$$

donde m es la masa del electrón, E_ν la energía del antineutrino incidente y $T = E - m$ la energía cinética del electrón saliente.