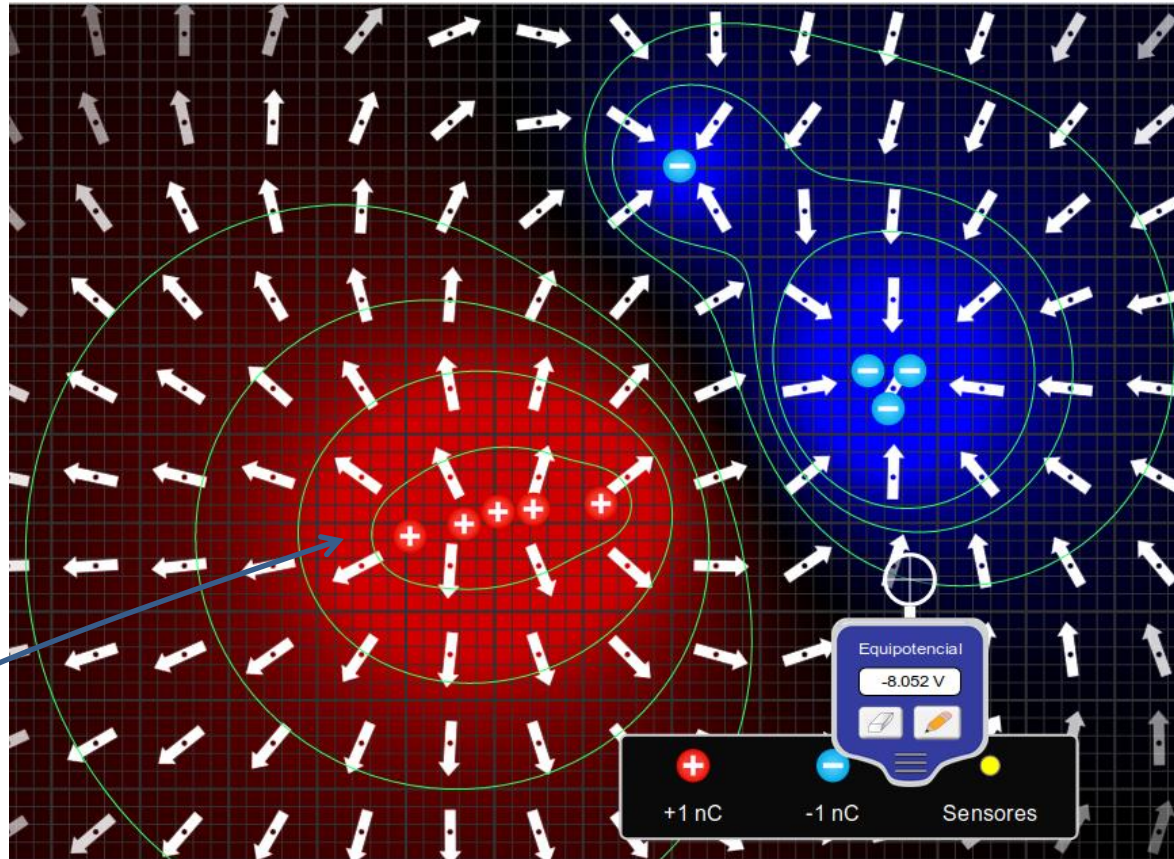


04. Energia de configuracion

Conductores

Capacitores

Clase anterior

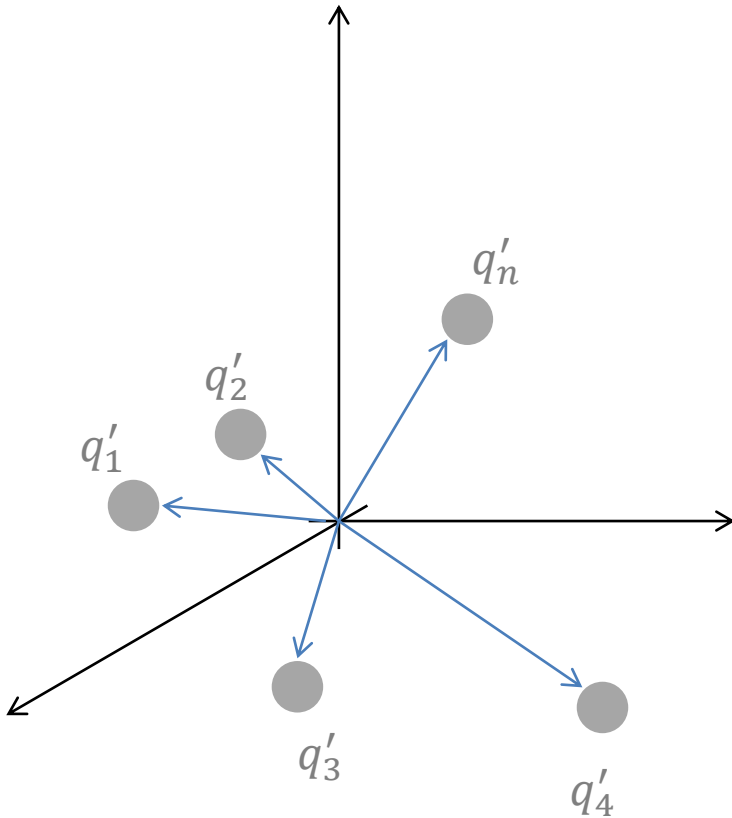


$\vec{E}(\vec{r})$ y $V(\vec{r})$ reflejan propiedades de la distribución de cargas

Esta region tiene alto V porque tengo que hacer mucho trabajo contra F_{elec} para acercar una carga a esta region del espacio (alta concentracion de cargas + cercanas)

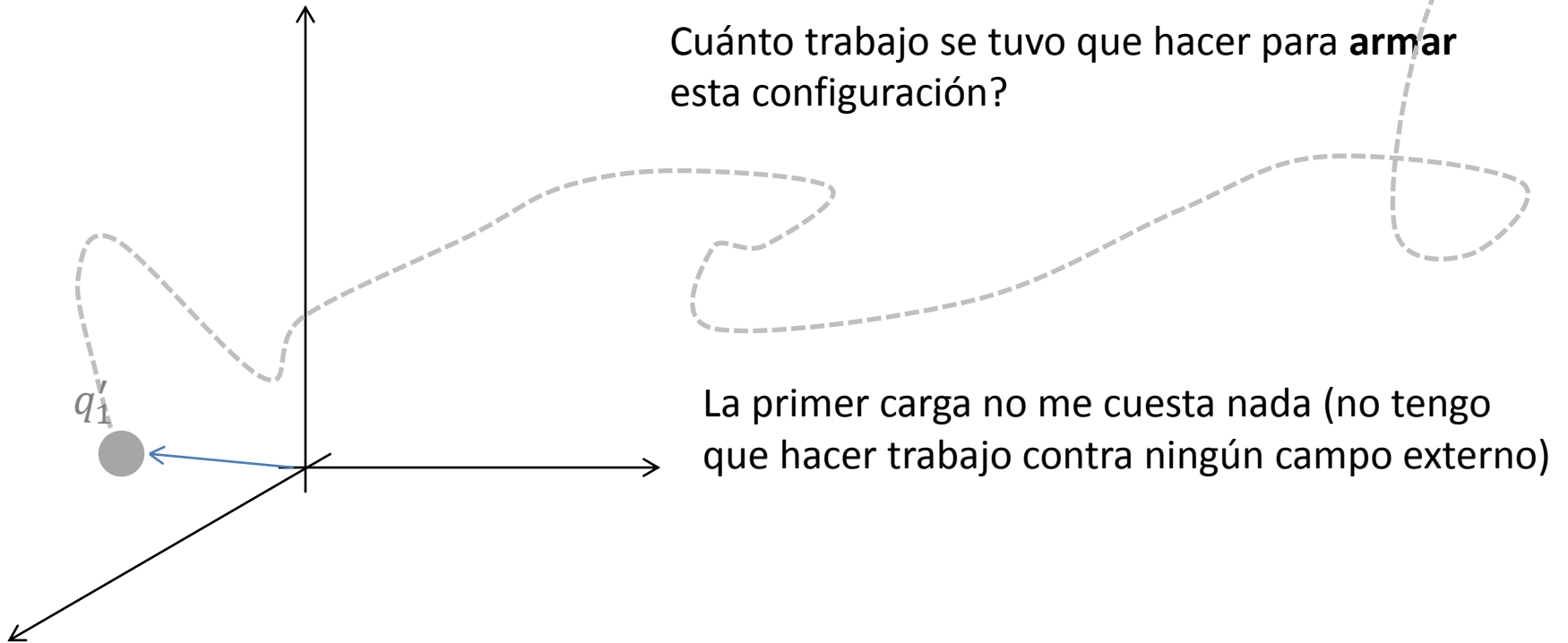
Energía de una configuración

Cuánto trabajo se tuvo que hacer para **armar** esta configuración?



Nota: Como siempre, vamos a pensar que, en su configuración final, las cargas se encuentran fijas gracias a la presencia (implícita) de fuerzas de carácter no-electrostático que impiden que las mismas se muevan

Energía de una configuración

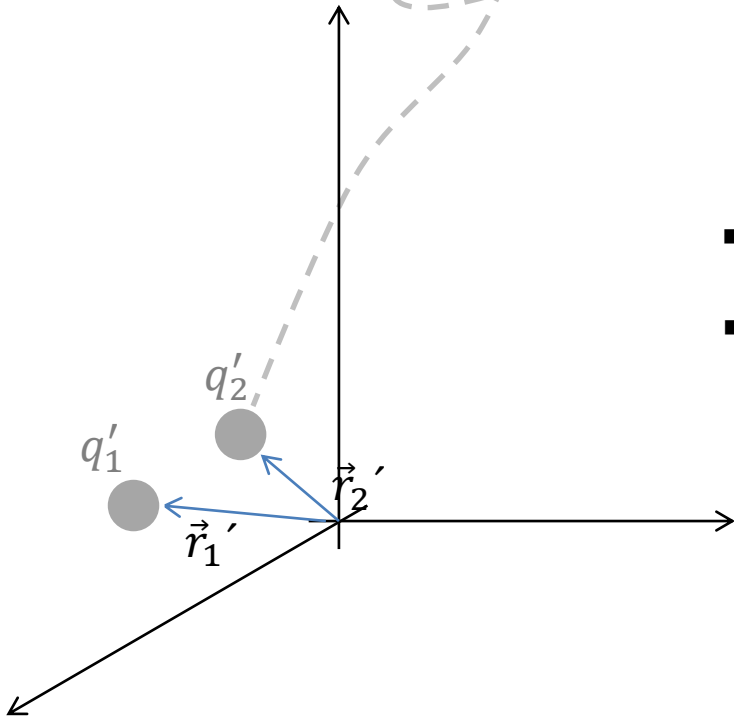


Nota: Como siempre, vamos a pensar que, en su configuración final, las cargas se encuentran fijas gracias a la presencia (implícita) de fuerzas de carácter no-electrostático que impiden que las mismas se muevan

Energía de una configuración

Cuánto trabajo se tuvo que hacer para **armar** esta configuración?

- La primer carga no me cuesta nada
- Para traer la 2da carga tengo que hacer trabajo contra el campo generado por q'_1



$$U_{21} = q'_2 V_{q'_1}(\vec{r}'_2) = \frac{kq'_2q'_1}{r_{21}} = q'_2 V_{21}$$

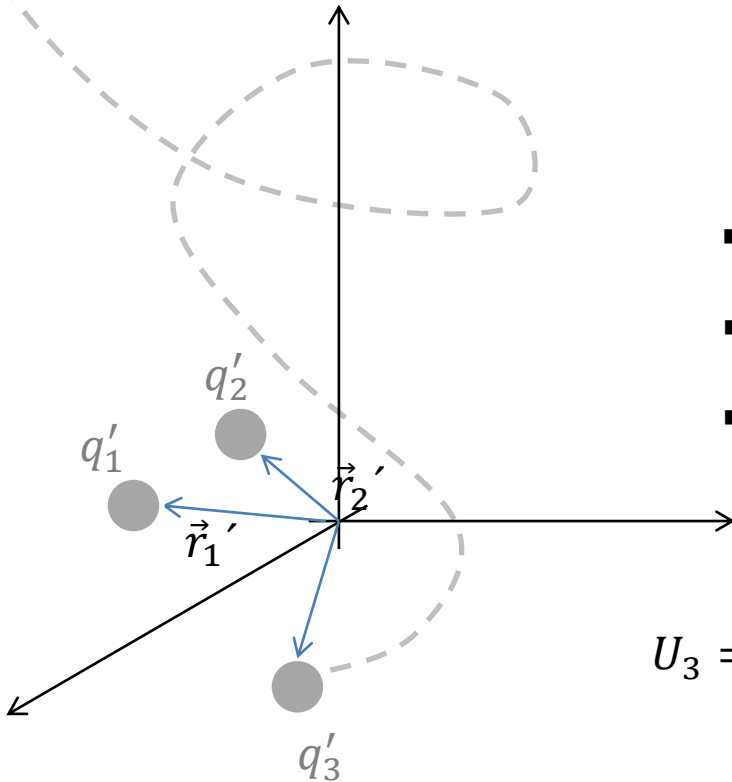
↑
notación
|
 V_{21}

Nota: Como siempre, vamos a pensar que, en su configuración final, las cargas se encuentran fijas gracias a la presencia (implícita) de fuerzas de carácter no-electrostático que impiden que las mismas se muevan

Energía de una configuración

Cuánto trabajo se tuvo que hacer para **armar** esta configuración?

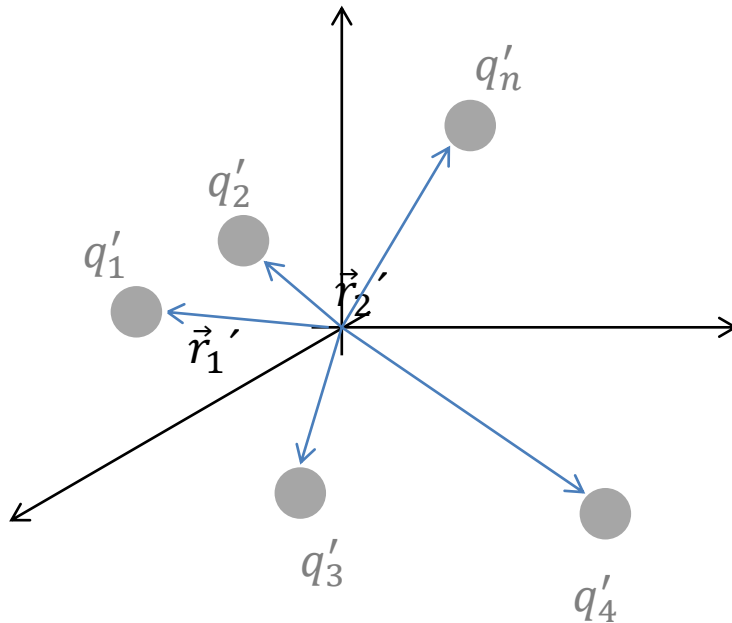
- La primer carga no me cuesta nada
- Trabajo para traer la 2da carga: $U_2 = U_{21} = q'_2 V_{21}$
- Trabajo para traer la 3ra carga:



$$\begin{aligned} U_3 &= U_{31} + U_{32} = q'_3 \left(V_{q'_1}(\vec{r}_3') + V_{q'_2}(\vec{r}_3') \right) \\ &= q'_3 (V_{31} + V_{32}) \end{aligned}$$

Nota: Como siempre, vamos a pensar que, en su configuración final, las cargas se encuentran fijas gracias a la presencia (implícita) de fuerzas de carácter no-electrostático que impiden que las mismas se muevan

Energía de una configuración



Cuánto trabajo se tuvo que hacer para **armar** esta configuración?

- La primer carga no me cuesta nada
- Trabajo para traer la 2da carga: $U_2 = U_{21} = q'_2 V_{21}$
- Trabajo para traer la 3ra carga: $U_3 = U_{31} + U_{32}$
- Trabajo para traer la 4ta carga: $U_4 = U_{41} + U_{42} + U_{43}$

- Para traer **todas** las cargas (armar la configuración)

$$U_{Tot} = U_{21} + U_{31} + U_{32} + U_{41} + U_{42} + U_{43} + \dots$$

$$U_{Tot} = \sum_{i>j} U_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} U_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} q'_i V_{ij} = \frac{1}{2} \sum_i q'_i \underbrace{\left(\sum_{j \neq i} V_{ij} \right)}_{V_i} = \frac{1}{2} \sum_i q'_i V_i$$

$$U_{Tot} = \frac{1}{2} \sum_i q'_i V_i$$

Para distr. continua

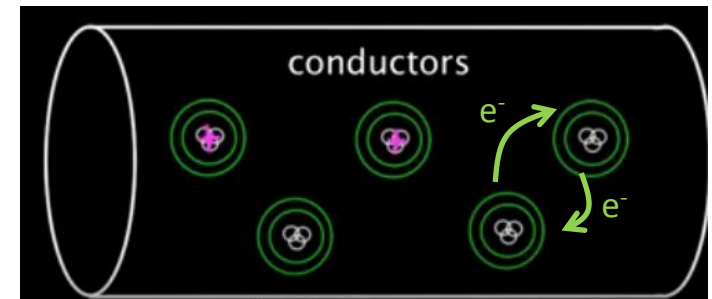
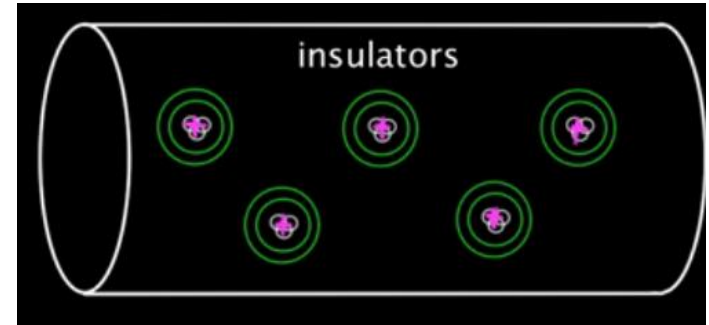
$$U_{Tot} = \frac{1}{2} \int \rho V dv$$

V_i

Potencial total del **resto** de las cargas sobre la carga-i

Materiales

- **Dielectricos:** materiales en los que los electrones se encuentran localizados junto a sus centros atómicos
- **Conductores:** materiales que poseen cargas capaz de desplazarse distancias macroscópicas

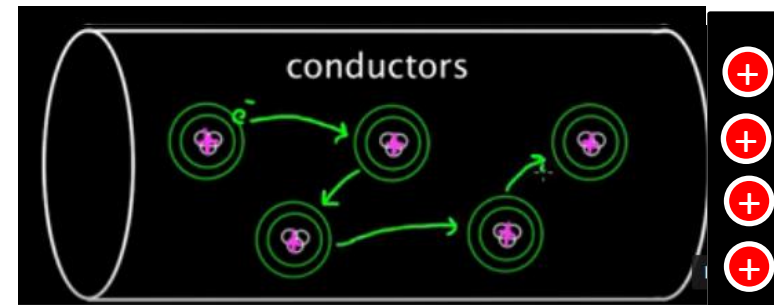
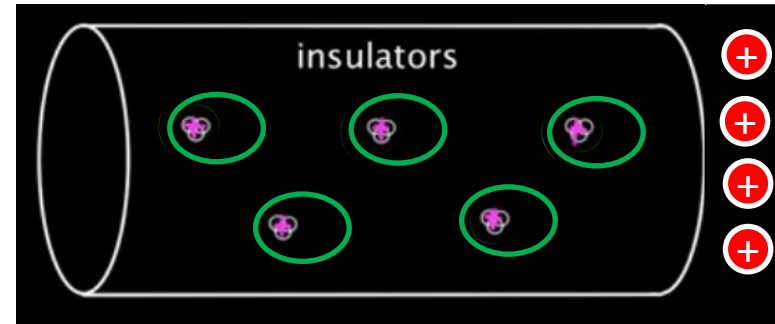


Átomos en los nodos de la estructura molecular del material. Cada átomo tiene carga positiva en su núcleo rodeada por idéntica carga negativa (nube electrónica)

Materiales

- **Dielectricos:** materiales en los que los electrones se encuentran localizados junto a sus centros atómicos
- **Conductores:** materiales que poseen cargas capaz de desplazarse distancias macroscópicas

Nubes electrónicas se deforman



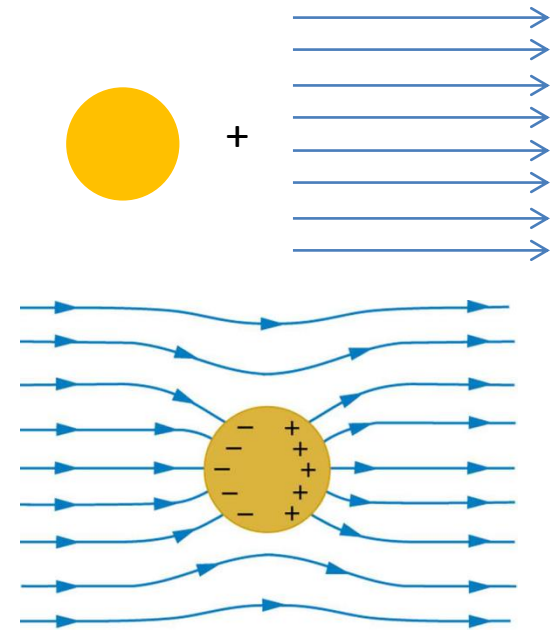
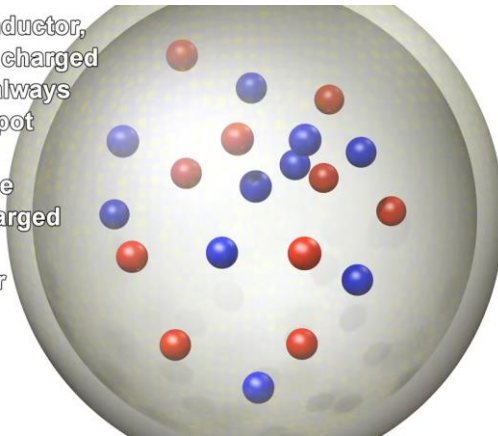
Electrones más externos pueden *saltar* de órbitas y desplazarse distancias macroscópicas

Conductores en equilibrio

En el equilibrio (cuando ya nada se mueve) siempre tiene que suceder que el campo $\vec{E}$ **dentro del conductor debe ser nulo** (de otra forma habría cargas moviéndose, i.e. estaría en una situación fuera de equilibrio)

Las cargas se **redistribuyen** cuando hay campos externos

In a metal conductor, the positively charged particles are always fixed at one spot and unable to move. But, the negatively charged particles are free to wander around.

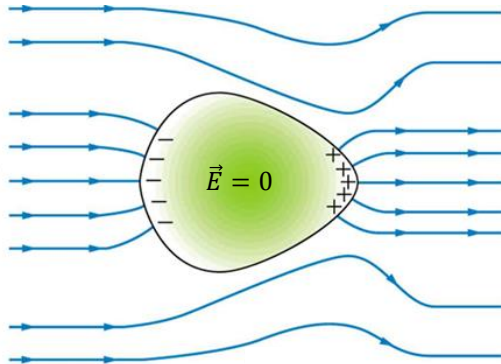


En el equilibrio el campo **total** (externo + cargas conductor) dentro del conductor debe ser nulo.

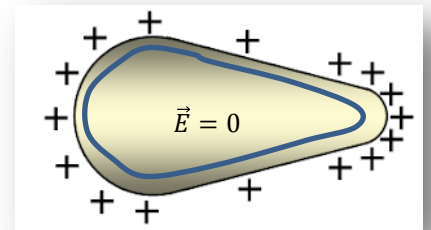
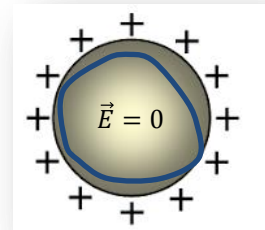
Conductores en equilibrio

En el equilibrio (cuando ya nada se mueve) siempre tiene que suceder que el campo $\vec{E}$ **dentro del conductor debe ser nulo** (de otra forma habría cargas moviéndose, i.e. estaría en una situación fuera de equilibrio)

Las cargas se redistribuyen para anular el campo dentro del conductor



Para **conductores cargados**, el exceso de carga se encuentra en la superficie



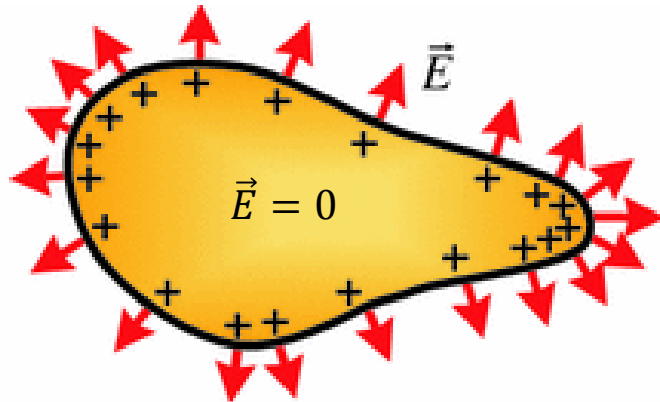
$$\phi_S = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = 4\pi k Q_{encerrada}$$

Campo fuera del conductor

En el **equilibrio**, el campo **dentro** del conductor debe ser nulo....

...pero qué sucede **sobre la superficie**?

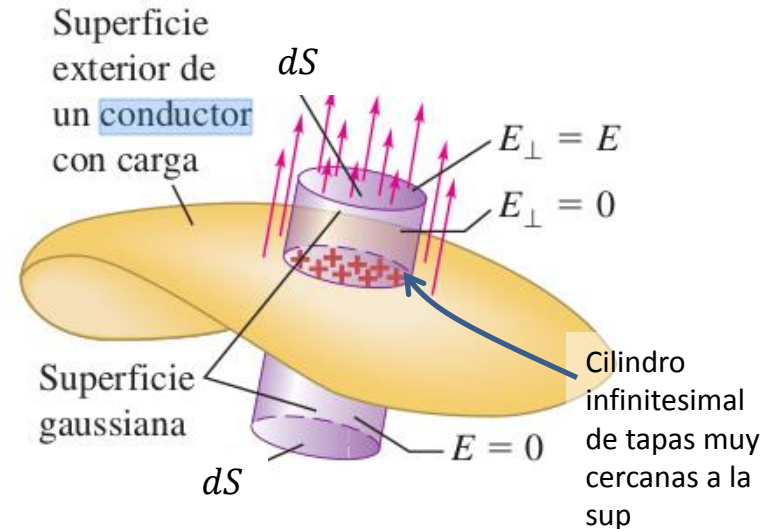
Conductor cargado



$E_{//}^{sup} = 0$ ← de otra forma las cargas libres se moverían sobre la superficie

$E_{\perp}^{sup} = ?$

Uso ley de Gauss:



$$\phi_S = \oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = 4\pi k Q_{encerrada}$$

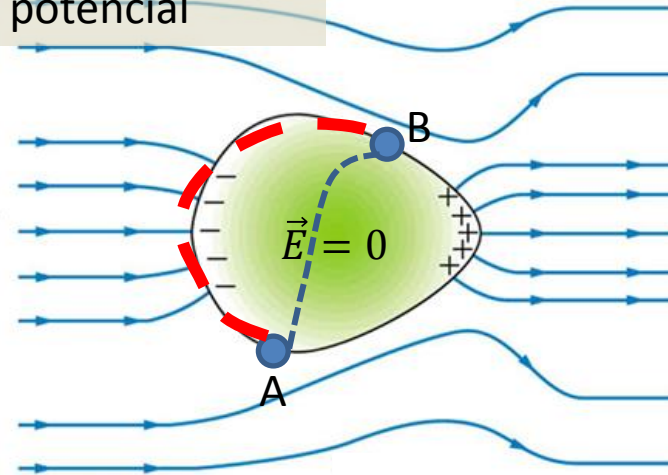
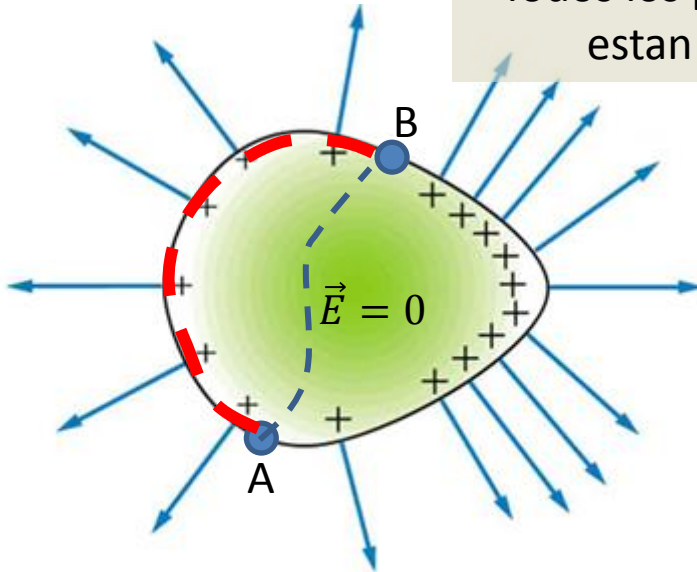
$$E_{\perp}^{sup} (tapa up) \hat{n} \cdot \hat{n} dS = 4\pi k \sigma dS$$

Entonces sobre la sup: $\vec{E}^{sup} = E_{\perp}^{sup} \hat{n}$

$$E_{\perp}^{sup} = 4\pi k \sigma$$

Potencial en un conductor

Todos los puntos de un conductor están al mismo potencial



$$\vec{E}^{sup} = 4\pi k\sigma\hat{n}$$

Cuanto cambia el potencial cuando paso del punto A al punto B?

$$\Gamma: dV = -\vec{E}^{sup} \cdot d\vec{l} = 0$$

En todo punto de la trayectoria roja $\vec{E}^{sup}$ es perpendicular al desplazamiento

$$\Gamma: dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Notar que si elijo un camino como el azul encuentro también que el potencial no cambia (era obvio...no?)

Resumiendo: conductores en equilibrio

Conductores: materiales que poseen cargas capaz de desplazarse distancias macroscópicas

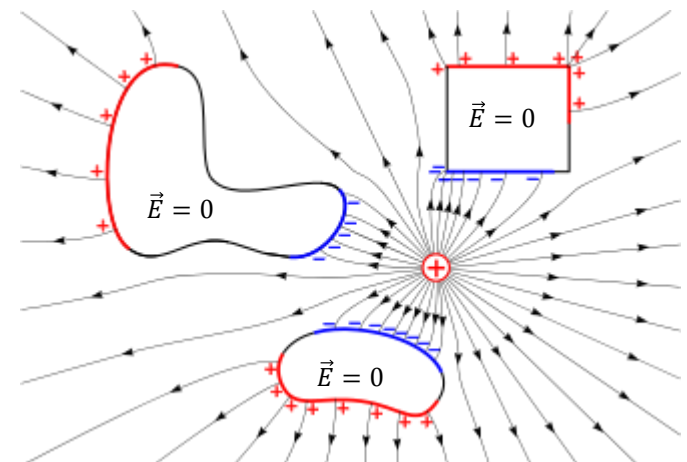
En el equilibrio las cargas se redistribuyen para anular el campo dentro del conductor: $\vec{E}^{interior} = 0$

Para **conductores cargados**, el exceso de carga se encuentra en la superficie

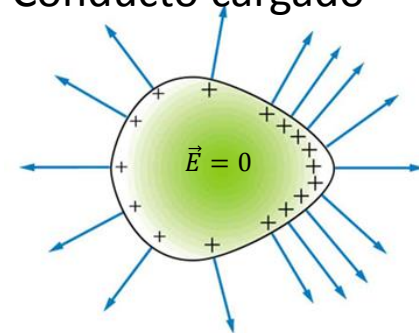
$$\vec{E}^{sup} = E_{\perp}^{sup} \hat{n} \quad E_{\perp}^{sup} = 4\pi k\sigma$$

V es constante para todo punto del conductor

En presencia de campo externo

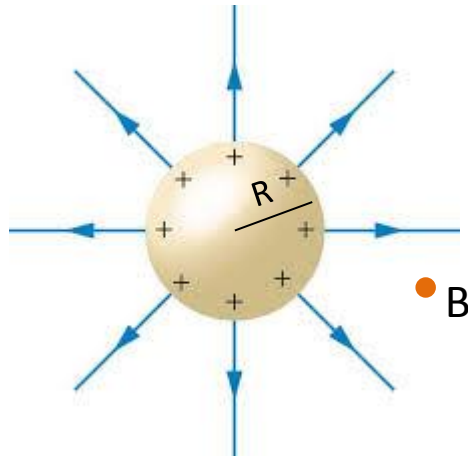


Conductor cargado



Ejemplo: Potencial de un conductor esférico cargado

Q: carga en exceso sobre la superficie



$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{kQ}{r^2} \hat{r} & r > R \end{cases} \quad \leftarrow \text{(usando Gauss)}$$

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = \begin{cases} 0 & r < R \\ -\frac{kQ}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{l} & r > R \end{cases}$$

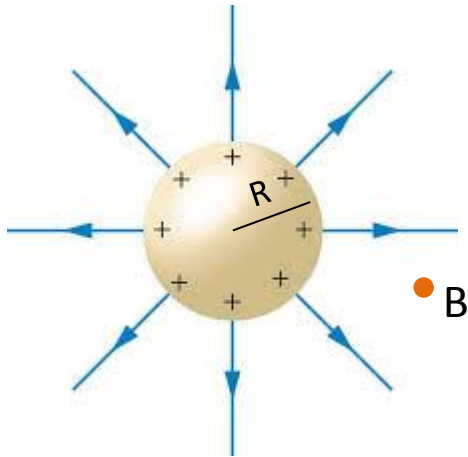
Recordemos lo que vimos la clase pasada en este ejemplo para $r > R$

$$\underbrace{\int_A^B dV}_{V_B - V_A} = - \int_A^B \frac{kQ}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{l} = - \int_A^B \frac{kQ}{r^2} dr = \frac{kQ}{r_B} - \frac{kQ}{r_A} \quad \rightarrow \quad V_B = \frac{kQ}{r_B} - \frac{kQ}{r_A} + V_A$$

Si elijo A como
referencia asumo $\rightarrow V_B = \frac{kQ}{r_B}$
A $\rightarrow \infty$ y tomo $V_A = 0$

Potencial de un conductor esférico cargado

Q: carga en exceso sobre la superficie

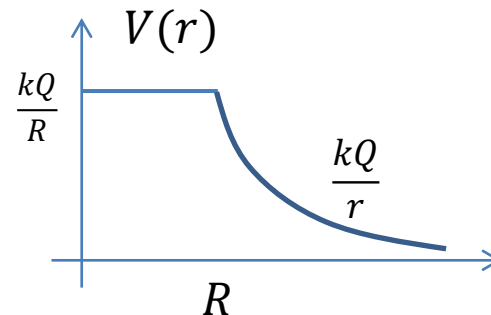


$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{kQ}{r^2} \hat{r} & r > R \end{cases} \quad \leftarrow \text{(usando Gauss)}$$

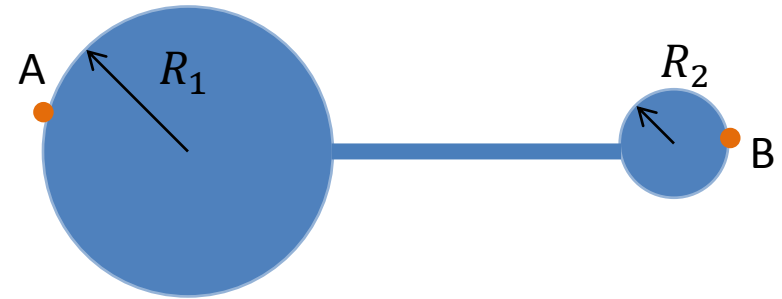
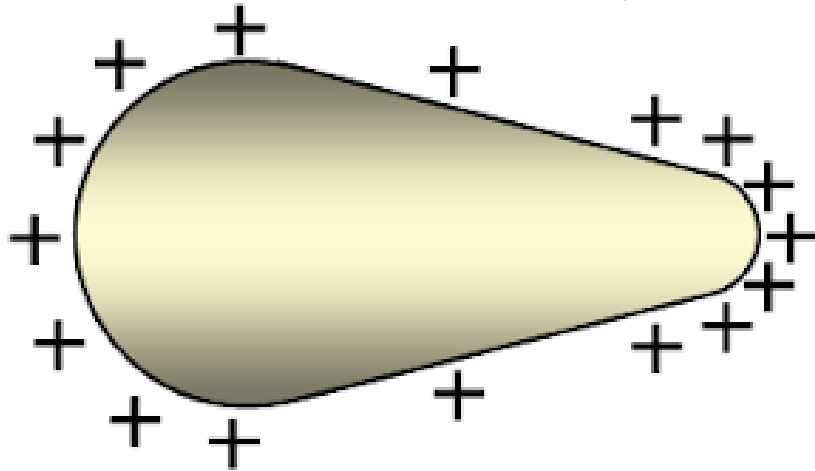
$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = \begin{cases} 0 & r < R \\ -\frac{kQ}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{l} & r > R \end{cases}$$

Recordemos lo que vimos la clase pasada en este ejemplo para $r > R$: $V_B = \frac{kQ}{r_B}$

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{kQ}{R} & r < R \\ \frac{kQ}{r} & r > R \end{cases}$$



Efecto de punta



Pero como ambas esferas están en contacto via un conductor (i.e. forman parte de un mismo conductor)

$$V(A) \sim \frac{kQ_1}{R_1} = V(B) \sim \frac{kQ_2}{R_2}$$

$$Q_1 = \frac{R_1}{R_2} Q_2$$

Cómo es la densidad de carga en ambas esferas?

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2} = \frac{\frac{R_1}{R_2} Q_2}{4\pi R_1^2} = \frac{Q_2}{4\pi R_1 R_2}$$

$$\sigma_2 = \frac{Q_2}{4\pi R_2^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 = \frac{Q_2}{4\pi R_1 R_2} \\ \sigma_2 = \frac{Q_2}{4\pi R_2^2} \end{array} \right\} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

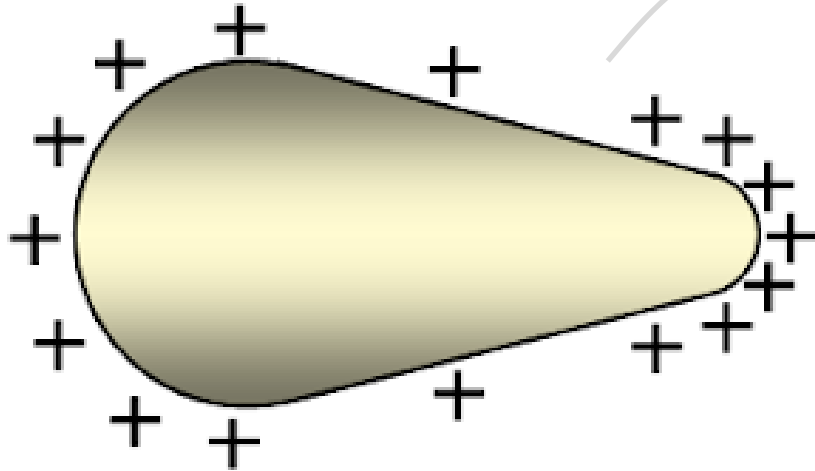
En nuestro ejemplo $R_1 \gg R_2$

$$\sigma_1 \ll \sigma_2$$

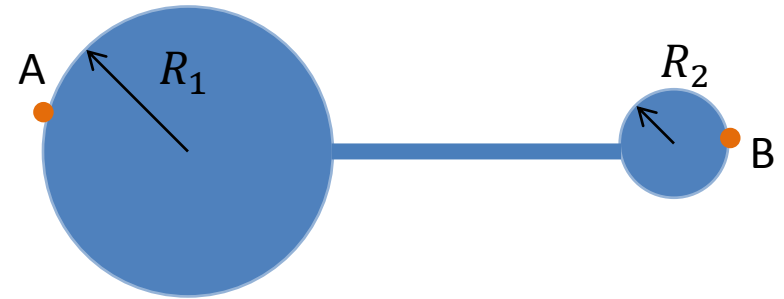
Además como $E_{\perp}^{sup} = 4\pi k\sigma$

$$E_{\perp}^{sup}(B) \gg E_{\perp}^{sup}(A)$$

Efecto de punta



Las **densidades** de carga y los **campos** electricos son **mayores** en las **puntas** de los conductores (zonas de bajo radio de curvatura)



$$V(A) \sim \frac{kQ_1}{R_1}$$

$$V(B) \sim \frac{kQ_2}{R_2}$$

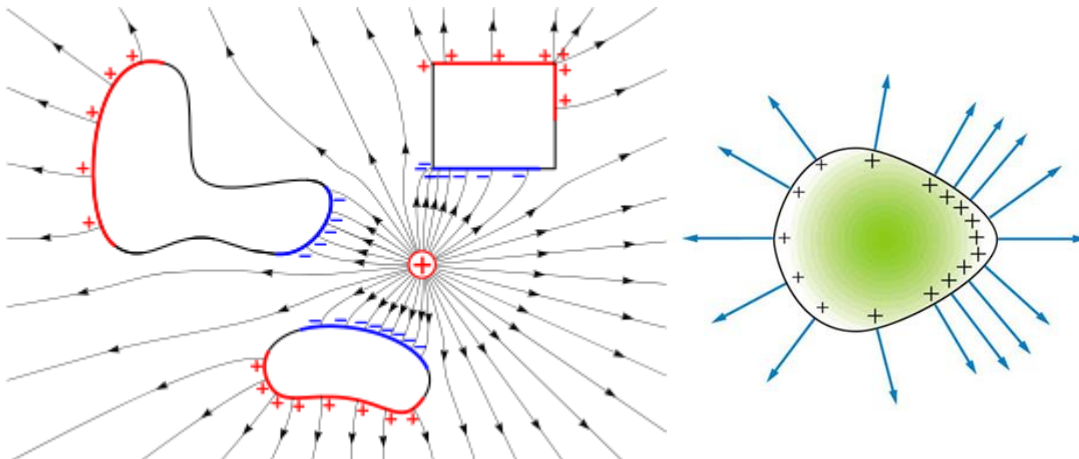
$$Q_1 = \frac{R_1}{R_2} Q_2$$

En nuestro ejemplo $R_1 \gg R_2$

$$\sigma_2 \gg \sigma_1$$

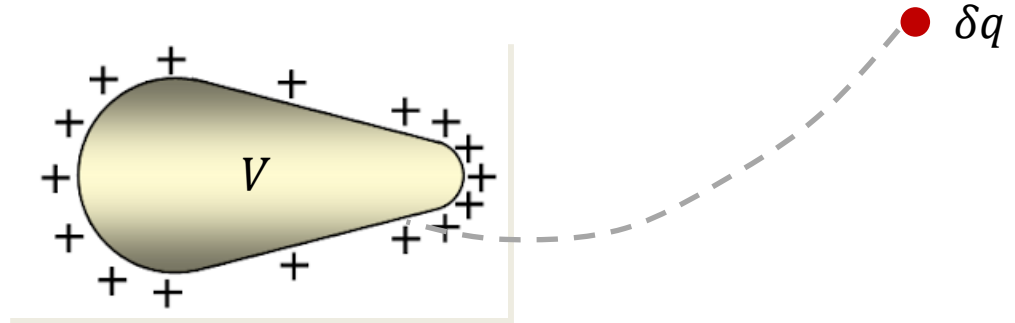
Además como $E_{\perp}^{sup} = 4\pi k\sigma$

$$E_{\perp}^{sup}(B) \gg E_{\perp}^{sup}(A)$$



Energía electrostática de un conductor

Cuánto trabajo (i.e. energía) cuesta cargar a este conductor?



Dado un conductor con carga q cuanto cuesta agregarle una carga δq ?

$$\left. \begin{array}{l} dU = V\delta q \\ \text{Ahora...en general vale que } V = \alpha q \end{array} \right\} dU = \alpha q \delta q$$

Para cargarlo desde 0 hasta Q

$$\Delta U = \alpha \int_0^Q q \, dq = \alpha \frac{Q^2}{2} = \frac{1}{2} VQ$$

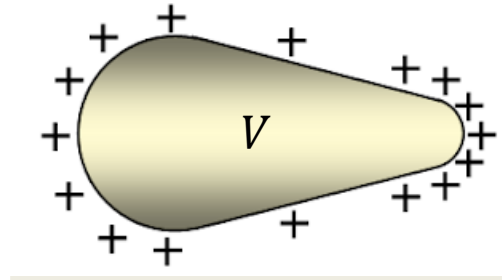
Notar: cargar a un conductor implica almacenar energía (en el mismo sentido que comprimir un resorte)

Capacidad de un conductor

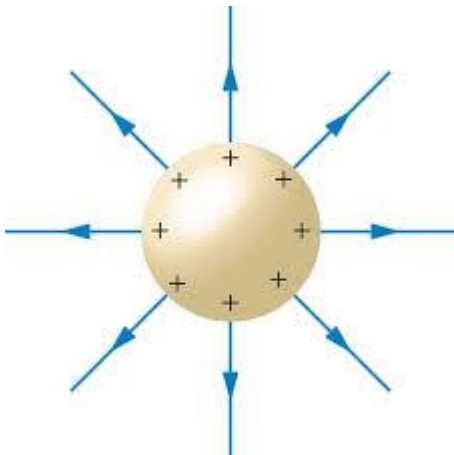
Al cargar a un conductor
habíamos visto que

$$V = \alpha Q$$


La constante de proporcionalidad depende
de la geometría del conductor



Ejemplo: conductor esférico



$$V = \frac{kQ}{R} = \frac{\tilde{k}}{R} Q$$

$$C = \frac{R}{k}$$

Se define como **capacidad** de un conductor a

$$C = \frac{Q}{V} \quad \text{Cuanta carga tiene por unidad de voltaje}$$

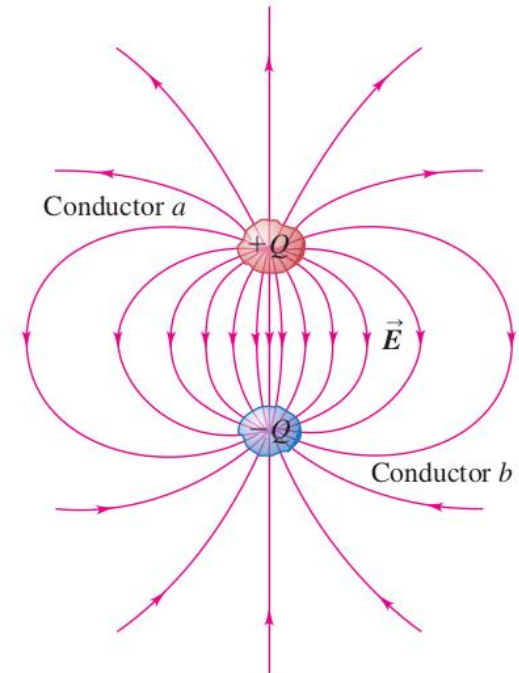
$$[C] = \frac{[Q]}{[V]} = F(\text{Faradios})$$

La energía almacenada en el conductor cargado

$$U = \frac{1}{2} VQ = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

Capacitores

- Dos conductores cualesquiera, aislados uno del otro, forman un **capacitor**
- En general vamos a considerar situaciones donde inicialmente cada conductor tienen carga nula y electrones de uno de ellos son transferidos al otro...de esta manera quedan cargados con carga $+Q$ y $-Q$
- Q : carga almacenada en el capacitor
- Va a existir ahora una diferencia de potencial V_{ab} entre los conductores cargados
- La capacitancia del capacitor resulta: $C = \frac{Q}{V_{ab}}$



Cuanto mayor C , más carga (o sea más energía) voy a poder acumular para una dada diferencia de potencial

Capacitor de placas paralelas

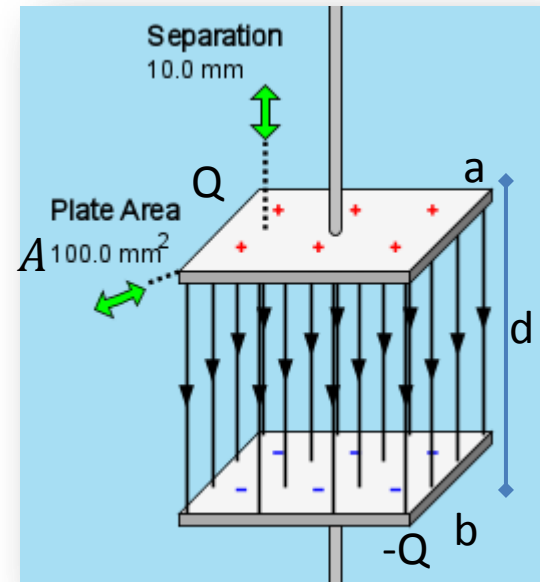
$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & \text{fuera} \\ -4\pi k\sigma \hat{y} & \text{entre placas} \end{cases}$$

$$\Delta V = V_a - V_b = - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= - \int_B^A -4\pi k\sigma \hat{y} \cdot \hat{y} dy$$

$$= 4\pi k\sigma \int_B^A dy$$

$$V_a - V_b = 4\pi k\sigma d$$



$$\Delta V = \frac{4\pi k d}{A} Q \quad \alpha$$

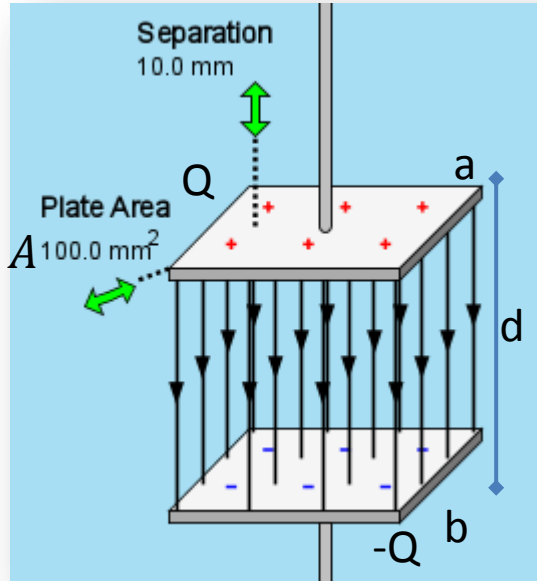
$$Q = \frac{A}{4\pi k d} \Delta V \quad C$$

Notar: α y C dependen de la **geometría** del arreglo de conductores y del **medio**

Notación:

$$\Delta V \leftrightarrow V$$

Energía almacenada en un capacitor



Habíamos dicho que en general vamos a considerar situaciones donde inicialmente cada conductor tiene carga nula y electrones de uno de ellos son transferidos al otro...de esta manera quedan cargados con carga $+Q$ y $-Q$

Cuanta energía necesitamos para hacer esto?

(repito lo que ya hicimos antes para un conductor)

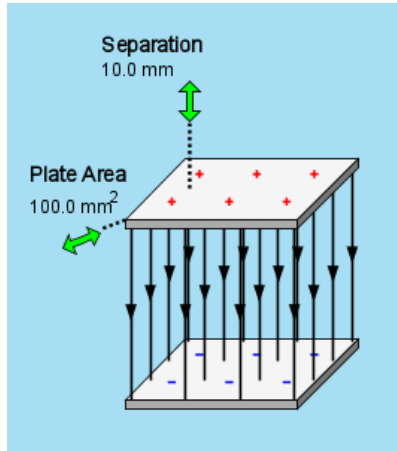
En una etapa intermedia supongamos que las placas están cargadas con q a una dif de potencial $\Delta v \equiv v$

$$q = Cv$$

Para incrementar la carga en un δq necesito hacer un trabajo: $dU = v \delta q = \frac{q \delta q}{C}$

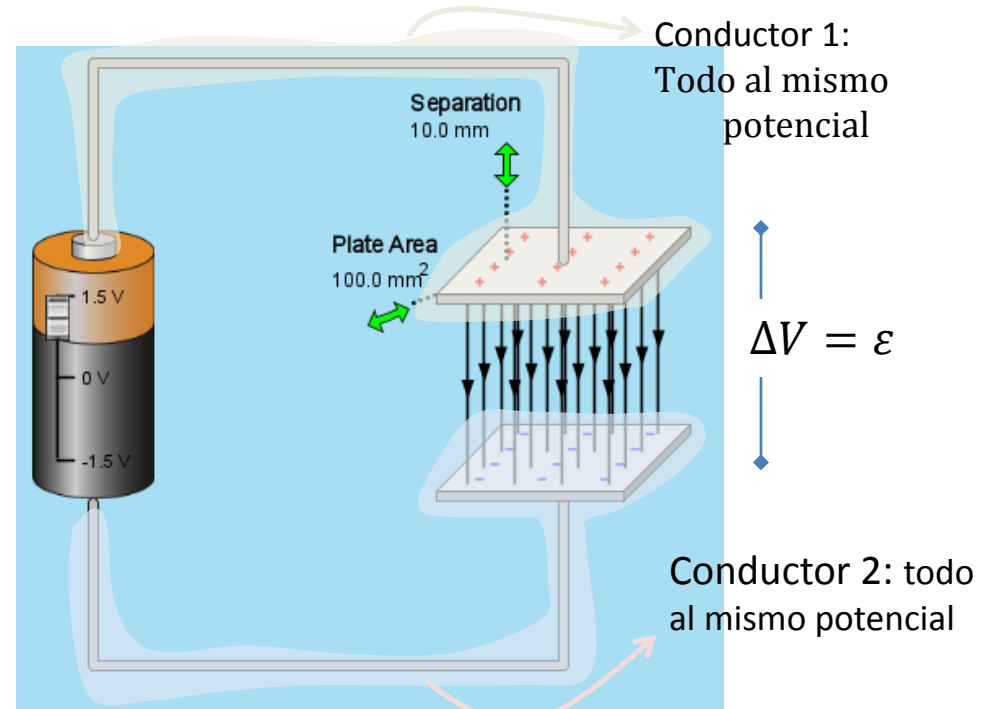
$$U = \int_0^Q \frac{q \delta q}{C} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} VQ$$

Capacitores aislados vs no-aislados



Q esta dado. $V = \frac{1}{C} Q$

Dispositivo que fija la diferencia de potencial entre las placas a un valor fijo ε



ΔV fijado por la pila

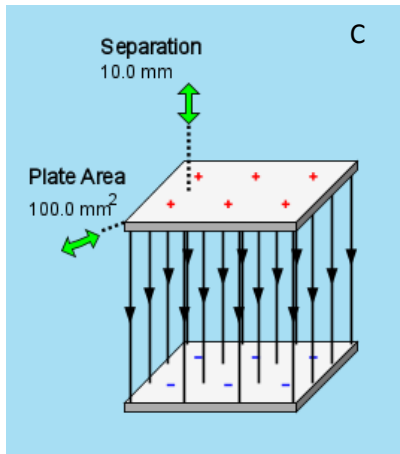
$Q = CV$

Si un capacitor se carga transfiriendo carga de una placa a otra, un incremento de C provoca una disminución y de la energía almacenada. Será más facil darle una carga dada.

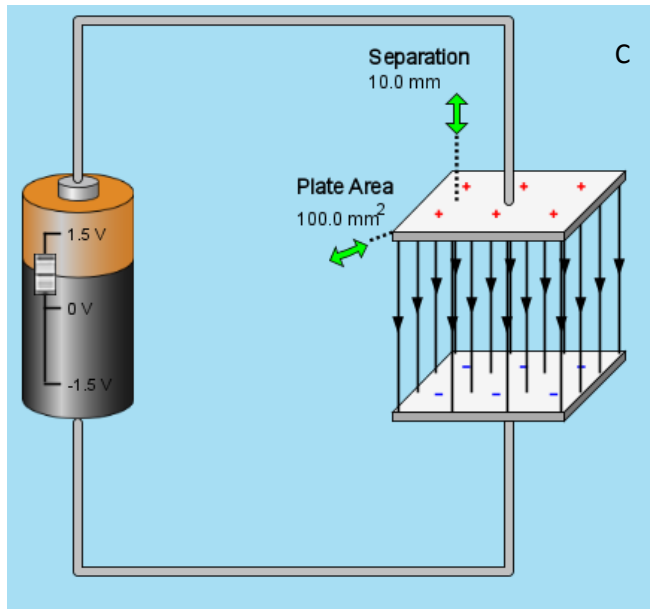
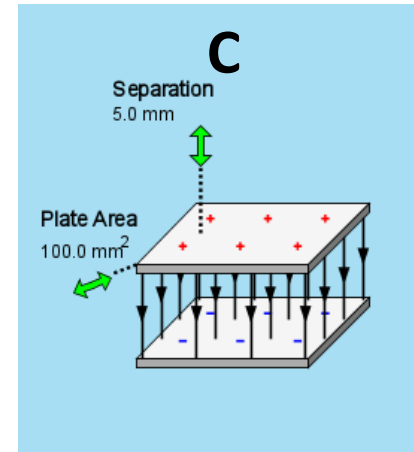
$$U = \frac{1}{2} VQ \quad \xrightarrow{V = \frac{1}{C} Q} \quad U = \frac{Q^2}{2C} \quad \xrightarrow{Q = CV} \quad U = \frac{1}{2} CV^2$$

Para capacitores que se cargan a V constante, un incremento de C da un incremento de Q y de la energía almacenada

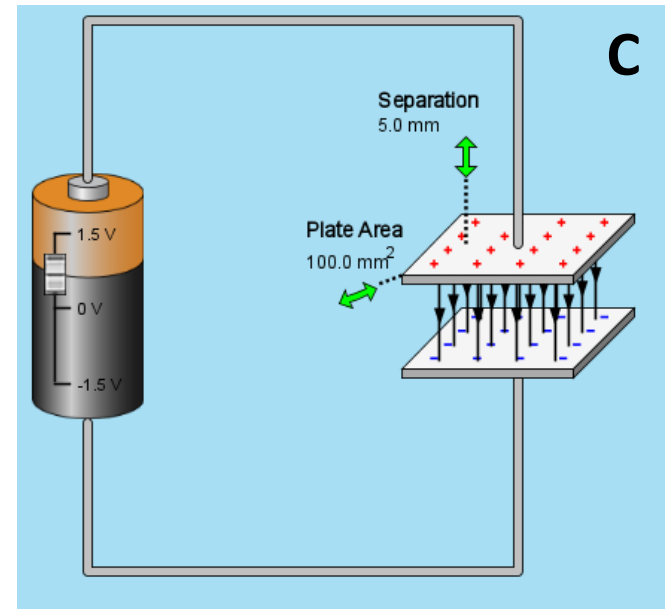
Capacitores aislados vs no-aislados



$$V = \frac{4\pi k d}{A} Q$$

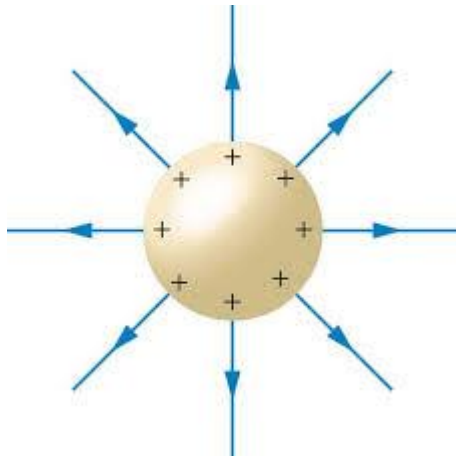


$$Q = \frac{A}{4\pi k d} V$$



Por que son útiles los capacitores de placas paralelas?

Conductor esférico

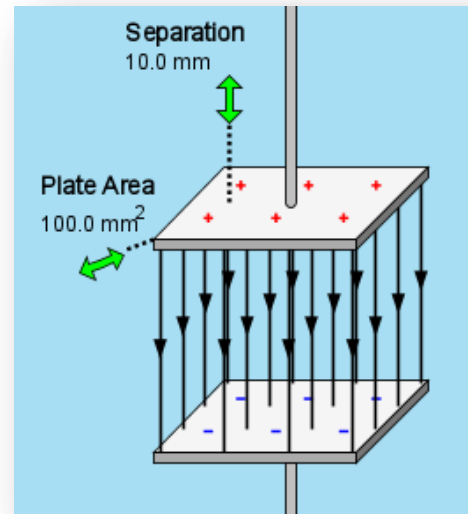


$$V = \frac{kQ}{R}$$
$$Q = \frac{R}{k} V$$

← C

C crece con el radio

$$U = \frac{1}{2} CV^2$$



$$Q = \frac{A}{4\pi k d} \Delta V$$

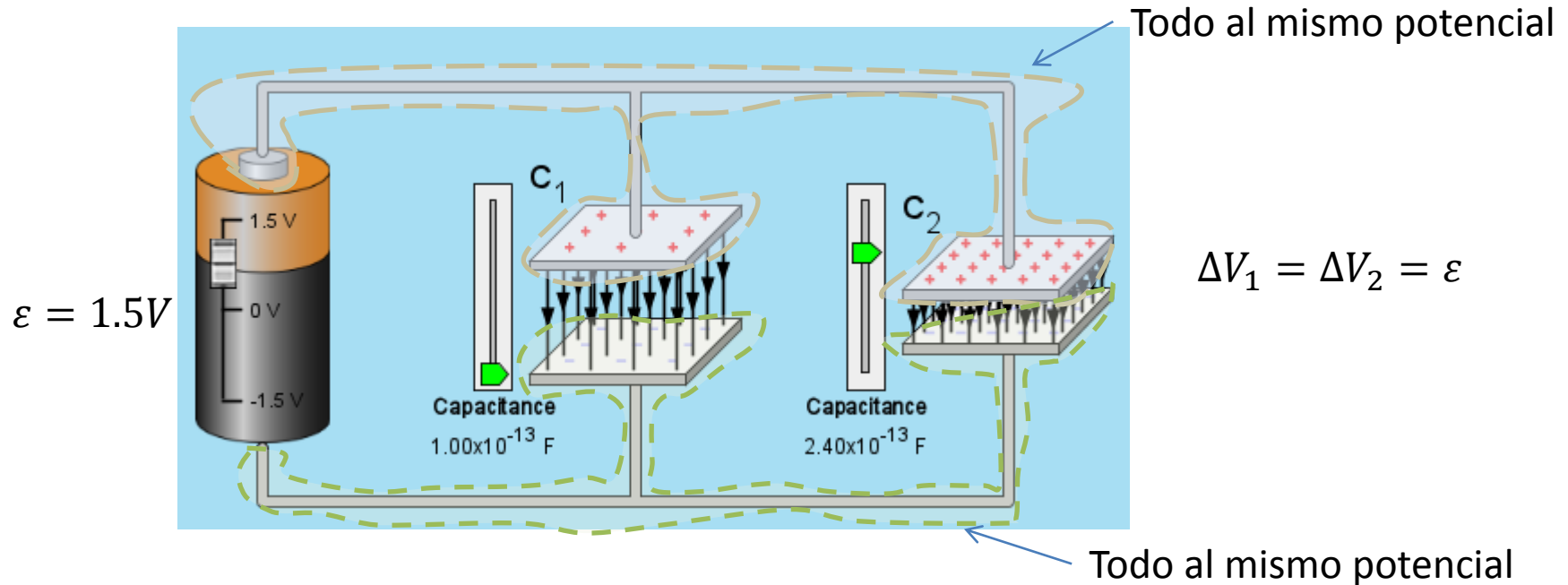
← C

C crece como 1/d



Con esta geometria de conductores puedo construir dispositivos con alta capacitancia en espacios muy reducidos

Capacitores en paralelo



Para cada capacitor $Q = CV$

$$Q_1 = C_1 V_1 = C_1 \varepsilon$$

$$Q_2 = C_2 V_2 = C_2 \varepsilon$$

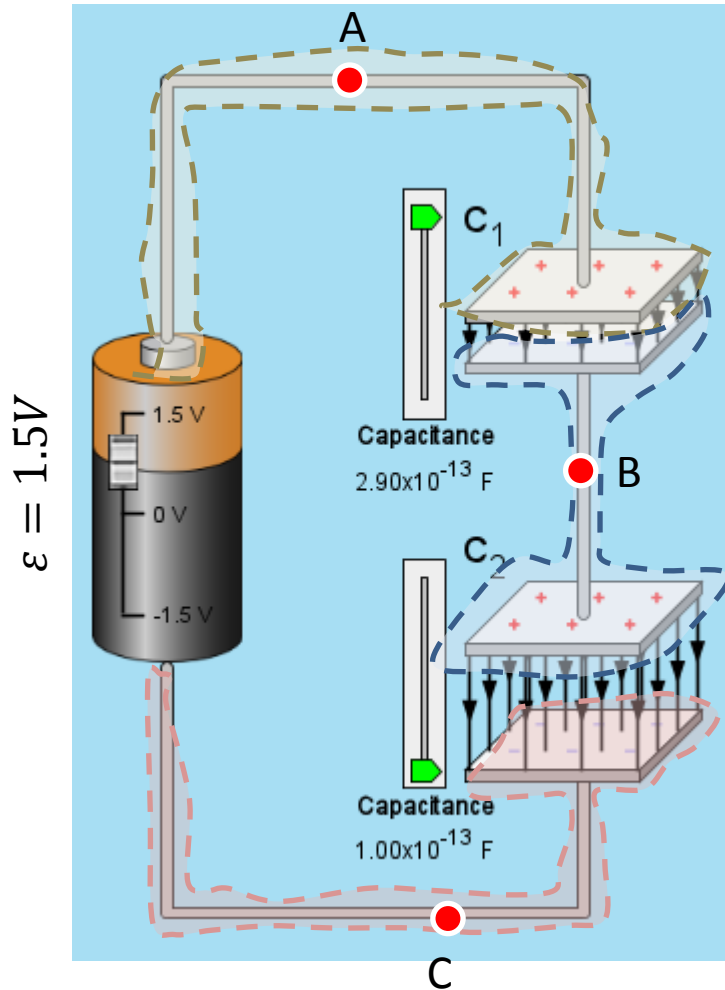
La carga total que reparte la pila a las placas : $Q = Q_1 + Q_2$

$$Q = (C_1 + C_2) \varepsilon$$

Capacidad
equivalente C_p

Si hubiese utilizado un unico capacitor de capacidad C_p la pila lo hubiera cargado con identica cantidad de carga Q

Capacitores en serie



Hay tres conductores, cada uno a un potencial diferente

El conductor central estaba inicialmente descargado, por lo que:

$$Q_1$$

$$-Q_1$$

$$Q_2 = Q_1 = Q$$

$$\Delta V_1 = \frac{Q}{C_1}$$

$$\Delta V_2 = \frac{Q}{C_2}$$

$$\Delta V_{AC} = \varepsilon$$

$$\Delta V_{AC} = \Delta V_{AB} + \Delta V_{BC}$$

$$\Delta V_{AB} = \Delta V_1 = \frac{Q}{C_1}$$

$$\varepsilon = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

$$\Delta V_{BC} = \Delta V_2 = \frac{Q}{C_2}$$

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) Q$$

$$\varepsilon = \frac{1}{C_s} Q$$

Si hubiese utilizado un unico capacitor de capacidad C_s la pila lo hubiera cargado con identica cantidad de carga Q