Ejercicio 6 (Guía 5)

La idea del ejercicio es intentar de calcular la profundidad a la que se generará la imagen *virtual* de la moneda. Para esto hay que prestar demasiada atención a la geometría del problema y así encontrar las suficientes relaciones de los datos del problema. Pero iremos de a poco y para esto hay que realizar el trazado de rayos de luz que salen de la moneda y se refractan en la interfaz agua-aire de arriba. En la Figura 1 tenemos el trazado y todo lo necesario para el ejercicio, por lo tanto es una imagen bastante cargada y hay que mirarla fijamente, además esto implica que nos vamos a referir a ella varias veces.

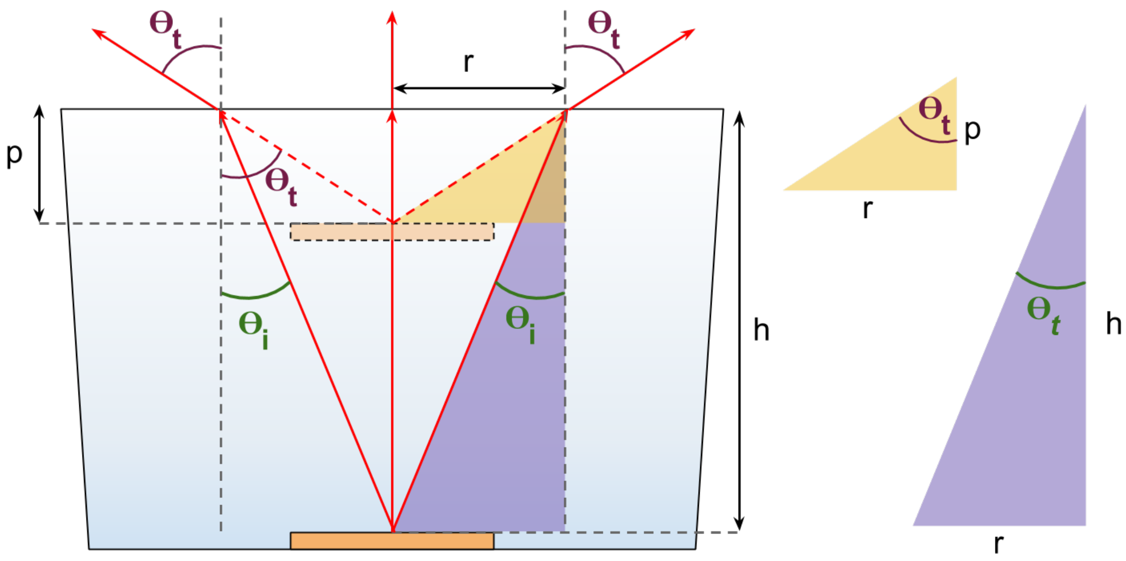

Figura 1: *Esquema del ejercicio 6 e) con coordenadas cilíndricas.*

Bien, lo primero a notar es que los rayos que salen y se refractan en el aire, son los que llegaran a nuestro ojo. Por esto, la continuación de ellos y luego la intersección, nos dará el punto donde se genera la imagen virtual. La distancia entre ese punto y la interfaz agua-aire la definiremos como p, la profundidad a buscar, y la distancia entre el punto donde el haz incide a la interfaz y el punto de origen del haz, la llamaremos r (por ponerle un nombre). Luego tenemos h la altura del vaso que nos proporcionan en el enunciado y los ángulos incidente (θ_i) y transmitido (θ_t). Estos últimos podemos relacionarlos mediante la ley de Snell de forma que

$$n_i sen(\theta_i) = n_t sen(\theta_t), \tag{1}$$

con $n_i \approx 4/3$ (agua) y $n_t \approx 1$ (aire).

Ahora tenemos que mirar fijamente el gráfico con los rayos, para poder relacionar p, r y h con los ángulos. Para esto, en la Figura 1 se visualizan dos triángulos rectángulos, uno amarillo y otro violeta y se los dibujó a la derecha para no seguir cargando la imagen. En ellos vemos que por el lado del triángulo amarillo tenemos que uno de sus ángulos es θ_t, su cateto adyacente es p y el opuesto es r; por el otro lado tenemos al ángulo θ_i, con su cateto adyacente h y el mismo opuesto que antes (r). Esto me permite relacionar todo por medio de las tangentes de los ángulos de forma tal que

$$tg(\theta_t) = \frac{r}{p} \tag{2}$$

$$tg(\theta_i) = \frac{r}{h} \tag{3}$$

Muy bien, ahora tenemos un sistema de ecuaciones no lineales que me relacionan todos nuestros datos e incognitas, que es el siguiente:

$$\begin{aligned} n_i sen(\theta_i) &= n_t sen(\theta_t), \\ tg(\theta_t) &= \frac{r}{p}, \\ tg(\theta_i) &= \frac{r}{h}. \end{aligned}$$

Pero, logicamente no es trivial la resolución y además dependerá del ángulo con el que mire a la imagen de la moneda. Para evitar esto podemos tomar la aproximación paraxial, es decir que miramos con ángulos pequeños y entonces

$$\theta \ chico \ \Rightarrow \ sen(\theta) \approx \theta \ y \ tg(\theta) \approx \theta.$$

Así nuestro sistema de ecuaciones se vuelve mucho más simple y queda

$$n_i\theta_i = n_t\theta_t \tag{4}$$

$$\theta_t = \frac{r}{p} \tag{5}$$

$$\theta_i = \frac{r}{h} \tag{6}$$

Y solo me queda resolverlo para encontrar p, por ejemplo si de la Ec. (4) despejo $\theta_t = \theta_i n_i/n_t$ y luego de (6) despejo $r = h\theta_i$. Falta reemplazar en (5) y despejar p para ver que queda

$$\boxed{p = \frac{n_t h}{n_i}}$$

Recordando que $h = 5cm$, $n_i = 4/3$ y $n_t = 1$ tenemos que $p = 3/4h$, entonces

$$\boxed{p = 3{,}75}$$