Clase práctica: Circuitos con resistencias y capacitores

18/09/20

En esta clase resolvimos el ejercicio 10 de la guía 2. En el mismo empezamos a ver como los circuitos pueden ser útiles herramientas para modelar algunos sistemas. En particular, en este ejercicio nos proponen analizar un modelo sencillo para el transporte de iones a través una membrana celular.

En la figura uno tenemos el esquema del circuito propuesto y nos dan como datos todos los valores de tensión para las fuentes y los valores característicos de las resistencias y el capacitor. Nos queda por lo tanto, como en la mayoría de los ejercicios, calcular la magnitud de las corrientes y, en este caso, nos piden la diferencia de potencial entre los puntos A y B, que representan el potencial de membrana en este modelo.

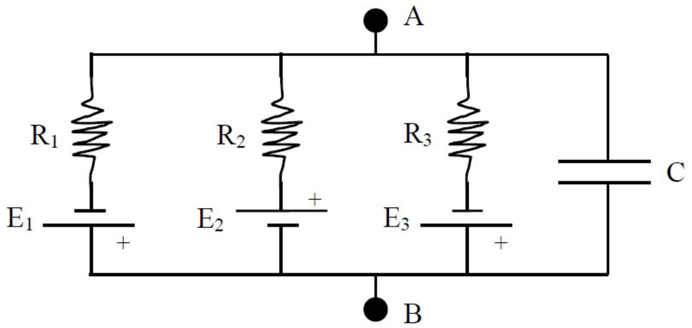

Figura 1: Esquema del circuito a resolver (G2E10)

Lo primero es identificar cuantas corrientes diferentes vamos a necesitar para describir este circuito. Para eso vemos que tenemos básicamente cuatro recorridos verticales todos en paralelo entre ellos (todos estan conectados a V_A y V_B en sus extremos). Por lo tanto, uno se vería tentado a decir rápidamente que para describir el circuito necesitaremos 4 corrientes diferentes y al menos 3 mallas. Esto no es así, dado que en el problema nos dicen que el circuito se encuentra en estado estacionario, es decir que el capacitor se encuentra completamente cargado. Como el capacitor es básicamente un circuito abierto (las placas no están conectadas entre si), si el mismo no está dando o recibiendo carga del circuito, signficia que no habrá una corriente circulando por el cable de la derecha. Por lo tanto, nos alcanzará con utilizar 3 corrientes diferentes y por lo tanto dos mallas distintas.

Una vez identificadas las corrientes, tenemos que elegir un sistema de referencia para definir los signos de las caídas de tensión. Como se acordarán de la clase anterior, básicamente vamos a suponer una dirección de circulación para cada corriente y luego la cuenta nos dirá si estamos en lo correcto (si la corriente en cuestión es positiva) o si la misma circula en la dirección opuesta (la corriente resultante es negativa). En este caso elegimos poner las corrientes en la misma dirección en que están colocadas las fuentes de tensión, pero de vuelta, es una elección arbitraria.

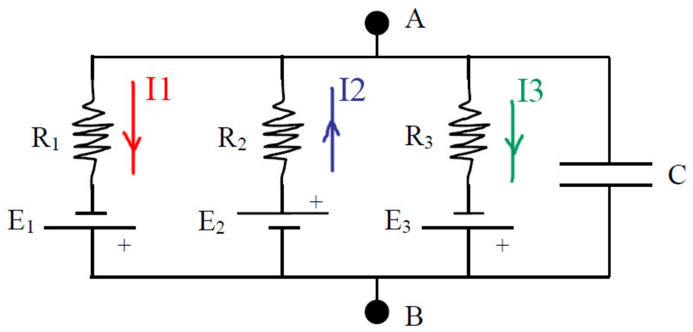

Figura 2: Elección de los sentidos de circulación a priori de las corrientes.

Una vez hecho esto, nos queda identificar y elegir las mallas con las que aplicaremos las leyes de Kirchhoff. Recordemos que nuestro objetivo es encontrar 3 ecuaciones independientes que nos permitan determinar cada una de las corrientes. En este caso, esas tres ecuaciones las vamos a obtener de la ley de mallas (una ecuación por malla) y de la ley de nodos (una ecuación que nos relacionará las corrientes entre ellas). Empecemos por la ley de mallas. Recordemos que la ley de mallas dice que las caídas de tensión a lo largo de cualquier circuito cerrado deben sumar a cero. Por lo tanto ahora deberemos elegir cómo hacer este recorrido. En la figura 3 tenemos los dos caminos que proponemos, pero pueden elegirse otros y obtener los mismos resultados. Recuerden que sus caminos deben pasar al menos una vez por cada elemento del circuito!

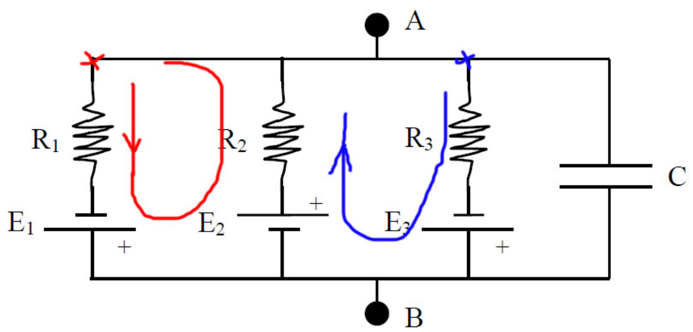

Figura 3: Mallas y puntos de inicio (cruces).

La primera malla (roja) la comenzaremos en la esquina superior izquierda y hacia abajo, recorriendo la rama de corriente I_1 y volveremos al punto de inicio a través de la resistencia R_2. Para esta primera malla, calculamos las caídas de tensión en cada elemento. Recuerden que la caída de tensión en una resistencia esta dada por la ley de Ohm ($V = IR$) y que el signo estará dado por la dirección en la que estamos recorriendo la malla comparada con la dirección que asumimos para la corriente. Lo que hay que recordar es que la tensión cae en la dirección de la corriente, por lo tanto desde el punto de inicio (cruz roja), como elegimos la corriente I_1 hacia abajo, veremos una caída de tensión en la resistencia de magnitud $-R_1I_1$. El siguiente elemento es la fuente de tensión que nos da una subida de tensión de magnitud E_1. Luego encontramos la fuente E_2 que también nos da una subida de tensión. Para finalizar, la resistencia R_2 nos da una caída de tensión por como elegimos la dirección de la corriente I_2. Con eso volvemos (hacia la izquierda) al punto de origen y por lo tanto todas esas diferencias de tensión sumaran a cero.

$$-I_1R_1 + E_1 + E_2 - I_2R_2 = 0 \tag{1}$$

La segunda malla la comenzamos arriba de R_3 y hacia abajo, retornando por la rama de E_2 y R_2. Si hacemos el mismo ejercicio que antes, obtenemos

$$-I_3R_3 + E_3 + E_2 - I_2R_2 = 0. \tag{2}$$

Con esto tenemos las dos ecuaciones correspondientes a las mallas. Nos falta una ecuación más, que obtendremos de usar la ley de nodos. Para esto elegimos el nodo inmediatamente superior al punto B, donde las tres conexiones se unen. Recordemos que la regla era la siguiente: si la corriente entra al nodo se suma, si sale se resta. En este esquema obtendremos de este nodo

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0. \tag{3}$$

Con esta ecuación que nos relaciona las corrientes tenemos las tres que necesitamos para resolver el problema. Como resolver este sistema de 3x3 es elección del participante. Nosotros elegimos restar las ecuaciones (1) y (2) para obtener una expresión para I_1 en función de I_3 y luego calcular I_3 con las otras ecuaciones. Esto resulta en

$$I_3 = \frac{E_3 + E_2 - (E_1 - E_3)\frac{R_2}{R_1}}{R2(1 + \frac{R_3}{R_1}) + R_3}. \tag{4}$$

Despejando las otras dos corrientes y reemplazando los datos obtenemos los siguientes valores para las corrientes: $I_1 = 17{,}5$ mA, $I_2 = 11{,}25$ mA y $I_3 = -6{,}25$ mA. Notamos que la corriente 3 dio negativa. Esto significa simplemente que circula en el sentido opuesto al que elegimos arbitrariamente al comienzo.

En la parte (b) del problema nos pide que calculemos la diferencia de potencial entre el punto A y B. Teniendo las corrientes esto es sencillo. Simplemente debemos repetir el procedimiento que hicimos para aplicar la ley de mallas pero entre estos dos puntos. ¿Por qué camino? Por el que más les guste. Si hicimos las cuentas bien todos deberían dar lo mismo! Nosotros elegimos usar el camino de la izquierda, resultando en

$$V_A - V_B = -E_1 + I_1 R_1 = -62{,}5\ mV. \tag{5}$$

Por lo tanto el resultado pedido $V_A - V_B = -62{,}5$ mV. Ahora que sabemos la diferencia de tensión entre A y B es sencillo calcular la carga del capacitor. Si el mismo se encuentra conectado a esa diferencia de potencial constante, va a acumular carga hasta llegar a la relación $Q = CV$, donde V es la diferencia de potencial entre las placas (en este caso la diferencia de potencial que acabamos de calcular). Con esto obtenemos que $Q = 3{,}125$ pC (recordamos que pico = p = 10^{-12}).

Para terminar, en la parte (c), nos dicen que cambió el valor de R_2 de tal forma que $V_A - V_B =$ 40 mV. Para resolver esto vemos que si sabemos esta diferencia de potencial cada una de las corrientes es muy fácil de calcular. Basta calcular la diferencia de potencial A y B por cada una de las ramas del circuito e igualarlas al valor dato para la diferencia de potencial. Con esto es sencillo obtener I_1 e I_3 y usando la ecuación 3 obtendremos I_2. Y para finalizar, de las caídas de tensión por la rama que contiene a R_2 tenemos

$$V_B - V_A = R_2 I_2 - E_2, \tag{6}$$

de donde despejamos

$$R_2 = \frac{V_B - V_A + E_2}{I_2} = 60,6\ k\Omega. \tag{7}$$