Clase práctica: Ley de Gauss

4 de septiembre de 2020

1. Las integrales de flujo y el teorema de Gauss

La ley de Gauss nos relaciona el campo y la carga a partir de una integral de flujo a partir de la relación

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_o}. \tag{1}$$

Esta integral de flujo mide, de alguna manera, cuantas de las flechitas que representan al campo electrico están pinchando dicha superficie cerrada S. Esto en general es una integral complicada, que para calcularla necesitamos conocer muy bien la superficie y la magnitud y la dirección del campo en todo punto de la misma (y resolver una integral de doble!). Ahora, hay determinadas configuraciones donde este flujo es fácil de calcular y aprovechándonos de esas situaciones podemos utilizar el teorema de Gauss para calcular el campo eléctrico en configuraciones de alta simetría.

Supongamos que tenemos la configuración sencilla de la figura 1. Tenemos un campo constante que apunta a la derecha y una superficie que es perpendicular a dicho campo. Como el campo es constante, sabemos cuanto vale en toda la superficie y también sabemos que, por elección de la misma, las flechas del campo pinchan la superficie de formal normal (perpendicular). En este tipo de configuración, la integral de flujo es muy fácil de resolver. El campo es constante, asi que sale afuera de la integral y lo que nos queda por calcular es el área de la superficie. El flujo terminará siendo simplemente $\Phi = EA$, donde E es el valor del campo y A el área de la superficie elegida. Esto es lo que vamos a buscar siempre en los problemas de Gauss. Elegir superficies donde sepamos que el campo es constante y que la dirección del mismo es normal (perpendicular) a la superficie en todo punto. De esta manera, nunca vamos a tener que resolver ninguna integral complicada.

Resolvamos ahora el ejemplo de la carga puntual. Aunque el campo de la misma no sea constante ni tan sencillo como el del ejemplo anterior ya lo conocemos. Por lo tanto, podemos elegir una superficie adecuada para calcular la integral de flujo y verificar si el teorema de Gauss es

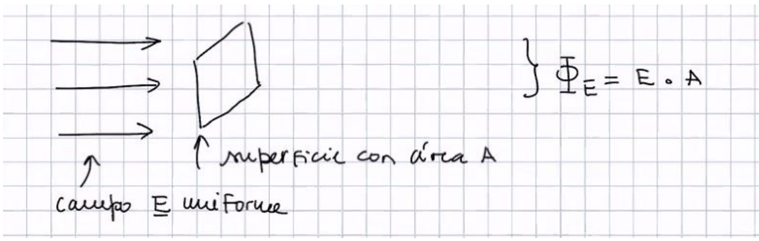

Figura 1: Un ejemplo sencillo donde es fácil calcular la integral de flujo.

correcto. Hagamos eso. El campo de una fuente puntual ubicada en nuestro origen de coordenadas es simplemente la ley de Coulomb:

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{r^2}\hat{r} \tag{2}$$

El campo, como sabemos, cae como la distancia a la carga al cuadrado. Por esto, si tomamos una superficie de Gauss esférica que contenga a la carga en su centro, el campo tendrá la misma magnitud sobre toda la superficie. Además, el campo es radial, por lo que la dirección del campo es perpendicular al a misma en todo punto. Estamos en la misma condición que en la figura 1!!

Con esto, calcular el flujo es muy sencillo. El campo es constante, así que sale afuera de la integral. Y lo que queda, es simplemente la integral del diferencial de área, que no es más que el área total de nuestra superficie de Gauss. Dijimios que la superficie era la de una esféra, pero no dijimos todavía el radio de la misma. Supongamos que la misma tiene un radio cualquiera R, como se ve en la figura 2. Ahora, la magnitud del campo sobre la superficie no es otra cosa que

$$E(r = R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{R^2} \tag{3}$$

y el área de la superficie es $4\pi R^2$. Por lo tanto, el flujo total es

$$\Phi = EA = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{R^2}4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_o} \tag{4}$$

que no es otra cosa que la ley de Gauss.

Perfecto, la ley de Gauss se cumple para el caso de la carga puntual. Ahora fijemonos si la podemos aprovechar para poder calcular el campo en una configuración un poco más interesante. Para eso vamos a encarar el problema 7b de la guía.

2. El ejercicio 7b: el cascarón esférico

Este ejercicio nos plantea una primera situación donde es útil utilizar la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico en todo el espacio. Sabemos que para poder calcular el campo usando la ley de Gauss vamos a tener que poder 'sacarlo de la integral' y para esto vamos a tener que apoyarnos en las simetrías de nuestro problema. En este caso, tenemos un cascarón esférico

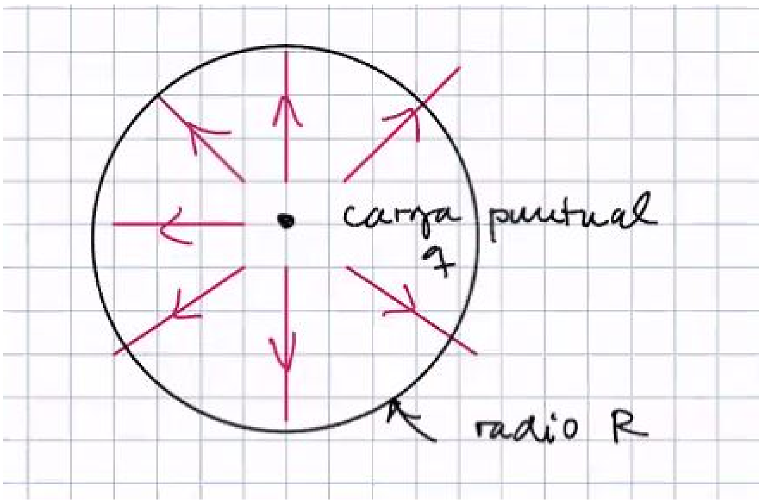

Figura 2: Superficie de Gauss esférica rodeando una carga puntual. En violeta se muestran las lineas del campo eléctrico producido por la carga.

con densidad de carga superficial constante σ. Ahora viene el momento de preguntarse: ¿Cómo esperamos que sea el campo producido por esta esfera cargada en superficie?

La primera cosa que podemos pensar es que, si la miramos muy muy desde lejos, la esfera se va a parecer a una fuente puntual, cuya carga q tiene que ser igual a la carga total del casquete, esto es $q = 4\pi R^2\sigma$. Eso es un muy buen comienzo. Si miramos de lejos, el campo tiene que parecerse a eso. Pero además, yo puedo aprovechar la alta (altísima) simetría de la distribución de cargas para contestarme dos cosas: hacia adonde apunta el campo en cada punto y de qué coordenadas depende su variación. Para este caso, sabemos que si rotamos la esfera de cualquier forma, la distribución de carga que vemos es siempre la misma y por consecuencia de esto el campo no puede depender de ninguna de las coordenadas angulares. Por la misma razón el campo debe apuntar en la dirección radial.

Sabiendo todo esto, es ahora mas claro como vamos a aplicar Gauss. Si las superficies en las cuales la magnitud del campo es constante son esferas y por ser radial el campo las atravieza de manera perpendicular, ya tenemos un candidato perfecto para superficie de Gauss.

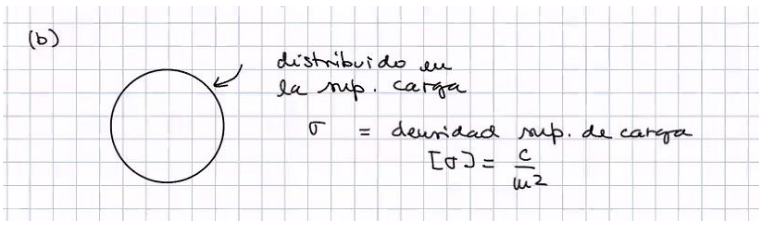

Figura 3: El cascarón esférico del problema 7b

Ahora tengo que tomar una superficie esférica (concentrica con nuestro cascarón) y calcular el flujo del campo a través de la misma y la carga encerrada. Si elegí una superficie en la cual la magnitud del campo es constante y su dirección normal a la misma, entonces voy a poder sacar el campo de la integral y de esa forma despejarlo en función de la carga que encierra nuestra superficie utilizando la igualdad otorgada por el teorema. Aquí nos encontramos con una primera dificultad. A la hora de elegir el radio de nuestra superficie esférica, vemos que tenemos dos opciones: Si el radio es menor al del casquete la carga encerrada será nula. Si el radio es mayor al del casquete, la carga encerrada será toda la del mismo. Eso nos divide el campo en dos regiones, para $r > R$ tendremos una expresión y para $r < R$ una expresión distinta.

Comencemos con el caso más facil, esto es, tomemos una esfera de radio menor al radio del casquete. Llamemos r al radio de mi superficie de Gauss, que puede ser cualquier número entre $0 < r < R$ (esta va a ser la variable que al final del día nos va a dar la dependencia del campo!). Como ya dijimos antes, el campo sale afuera de la integral de flujo, asi que nos queda directamente

$$\Phi = EA = E 4\pi r^2 = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_o} = 0. \tag{5}$$

En la última igualdad ya pusimos que nuestra superficie no encierra ninguna carga (porque dejamos todo el casquete afuera!). Como nuestro radio puede valer cualquier cosa, la única forma de cumplir esto es que el campo E tenga magnitud cero en todo el interior del casquete. Esto quiere decir que si ponemos una carga de prueba adentro del casquete no va a sentir ninguna fuerza, o lo que es lo mismo, cada una de las pequeñas fuerzas de Coulomb que cada punto del casquete realizan sobre la carga de prueba se cancela perfectamente con las provenientes de los otros puntos.

Para terminar, veamos ahora que pasa para $r > R$. En este caso, ahora nuestra superficie de Gauss si encierra carga. Cuanta? toda la del casquete, esto es, $Q_{enc} = 4\pi R^2 \sigma$. Usemos ahora el teorema de Gauss.

$$\Phi = EA = E 4\pi r^2 = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_o} = \frac{4\pi R^2 \sigma}{\epsilon_o}. \tag{6}$$

De esta ecuación ahora podemos despejar el campo, obteniendo finalmente

$$E = \frac{R^2 \sigma}{r^2 \epsilon_o}. \tag{7}$$

Esta es la magnitud del campo. Para escribir el resultado final, tenemos que recordar que todo esto vale si el campo es radial. Así que lo escribimos vectorialmente como

$$\vec{E}(r < R) = 0 \tag{8}$$

y

$$\vec{E}(r > R) = \frac{R^2 \sigma}{r^2 \epsilon_o} \hat{r}. \tag{9}$$

Para cerrar, vemos que el campo tiene la misma dependencia que el de la carga puntual, de la misma forma que habíamos intuido en un comienzo. Es más, si llamamos q a la carga total del casquete, de forma que $q = 4\pi R^2 \sigma$, vemos que podemos reescribir este resultado como

$$\vec{E}(r > R) = \frac{q}{4\pi r^2 \epsilon_o}\hat{r}. \tag{10}$$

Esto no es otra cosa que el campo de una carga puntual en el origen de coordenadas de magnitud igual a la carga sumada de todo el casquete!