Apunte adicional: Simetrías en Ampere

30/09/20

En la clase de la fecha resolvimos el campo magnético generado por un plano infinito y por un solenoide también infinito usando la ley de Ampere. Para esto, tenemos que conocer a priori cual es la dependencia y la dirección del campo magnético, para poder elegir apropiadamente la curva en la cual evaluaremos la integral de Ampere. La resolución para encontrar los campos está subida en formato video si no pudieron asistir a la clase. En este apunte, vamos a pasar en limpio los argumentos de simetría que usamos para encontrar la dependencia y la dirección del campo en estos dos casos.

1. Plano infinito

Empezamos recordando el problema. Tenemos un plano infinito, por el cual circula una densidad de corriente $\vec{g} = g\,\hat{y}$, como se muestra en la figura 1.

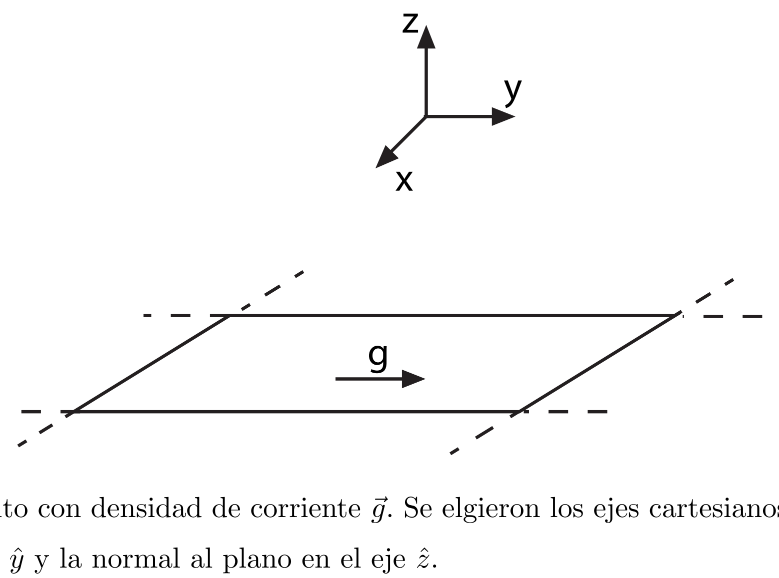

Figura 1: Plano infinito con densidad de corriente $\vec{g}$. Se elgieron los ejes cartesianos tal que la corriente queda en la dirección $\hat{y}$ y la normal al plano en el eje $\hat{z}$.

Para usar Ampere, queremos explotar al máximo la alta simetría de este problema para calcular las dependencias funcionales y la dirección del campo. Empecemos escribiendo el campo magnético más general posible. Este campo puede apuntar en cualquier dirección y cada una de estas componentes puede depender de las tres variables espaciales. Por lo tanto, el campo más general posible se puede escribir de la siguiente manera:

$$\vec{B} = B_x(x, y, z)\hat{x} + B_y(x, y, z)\hat{y} + B_z(x, y, z)\hat{z}. \tag{1}$$

La idea es ahora empezar a descartar dependencias y direcciones a partir de argumentos de simetría. Una simetría es una transformación que le aplico a mi sistema, cuyo resultado es indistinguible del sistema original. Empecemos por la más sencilla: Si desplazamos todo nuestro sistema una cierta distancia en la dirección $\hat{y}$ (dado que el plano es infinito) uno no puede distinguir el resultado del sistema original. Esto significa que si elijo dos puntos de igual coordenada x, igual coordenada z pero distinta coordenada y, los dos puntos deberán ver el mismo campo magnético. Una forma de pensar esto es que si me paro en cada uno de estos puntos, en ambos casos voy a ver infinito plano en todas direcciones y la distancia que tengo al plano es la misma. Luego, no hay razones para que el campo sea distinto. Con este primer argumento de simetría obtenemos un montón de información sobre nuestro campo. Ahora podemos simplificar un poco más la ecuación general (1), ya que nuestro campo no puede tener dependencia funcional en y. Usando este argumento podríamos reescribir la ecuación 1 de la forma:

$$\vec{B} = B_x(x, z)\hat{x} + B_y(x, z)\hat{y} + B_z(x, z)\hat{z}. \tag{2}$$

CUIDADO: esto no significa que el campo no pueda apuntar en la dirección $\hat{y}$. Con este argumento solo podemos asegurar que, en cualquier dirección en que el campo apunte, el mismo será constante a variaciones en la coordenada y.

El segundo argumento de simetría que vamos a usar es el mismo, pero para la coordenada x. Como el plano también es infinito en esta dirección, el campo no podrá depender funcionalmente de x. Con esto, solo nos queda la dependencia en z. Reescribimos la ecuación 2 como

$$\vec{B} = B_x(z)\hat{x} + B_y(z)\hat{y} + B_z(z)\hat{z}. \tag{3}$$

La coordenada z no posee una simetría de traslación. Si yo traslado el plano hacia arriba o hacia abajo, cambiaré la distancia que mi punto se encuentra respecto al plano. Por lo tanto, a priori, no puedo decir que mi campo no dependa de z y deberemos conservar esa dependencia.

Hasta ahora obtuvimos mucha información de las dependencias funcionales pero no de la dirección. Esta es la parte más difícil y es la que generó muchas preguntas en la clase. Repasemos lo que hicimos. Un primer argumento que hicimos fue pensar el plano como compuesto por una superposición de cables muy cerquita entre ellos y por los cuales circula una corriente I, que es la misma para todos. El campo total del plano será la suma de los campos de cada uno de esos cables. Como el campo de un cable es conocido y es siempre perpendicular a la dirección de la corriente, nunca vamos a obtener una componente que sea paralela a la corriente. Esto también puede verse en la ecuación de Biot-Savart. Como nuestra corriente se encuentra en la dirección $\hat{y}$ para todo punto, y el campo se escribe como una integral del producto vectorial de esa corriente, nunca podremos obtener una componente de campo magnético en la dirección $\hat{y}$. Podemos entonces simplificar aún más la expresión de nuestro campo, eliminando la dependencia en la $\hat{y}$. Hasta ahora:

$$\vec{B} = B_x(z)\hat{x} + B_z(z)\hat{z}. \tag{4}$$

Nos falta el último y más dificil de los argumentos. Ahora vamos a considerar una operación de simetría compuesta. Es decir, vamos a hacer dos transformaciones que no son simetrías por separado, pero al aplicarlas juntas si lo son. La idea de este argumento va a ser la siguiente: voy a proponer que mi campo tiene una componente en x y una en z como en la ecuación anterior. Luego de esto, voy a realizar las dos operaciones que juntas son una simetría. El campo que propongo también va a ir modificándose a medida que voy aplicando las transformaciones. Al final, como las operaciones son una simetría del sistema, voy a obtener el mismo plano y con la corriente en la misma dirección y sentido. Logrado esto, voy a comparar como transformó el campo y si encuentro una contradicción entre estos dos campos, entonces eso no podrá ocurrir. Todo este proceso se encuentra representado en la figura 2. Veamos esto paso a paso.

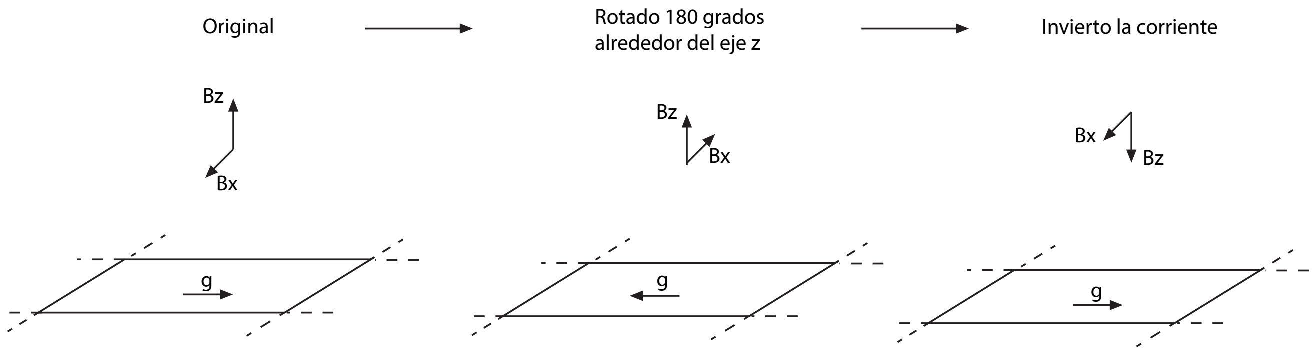

Figura 2: Operación de simetría paso a paso.

Partimos de nuestro problema original donde propusimos el campo en un punto cualquiera. Sabemos de la ecuación 5 que el campo tiene en principio componentes en $\hat{x}$ y en $\hat{z}$. La primera (de dos) transformaciones que haremos será rotar todo el sistema 180 grados alrededor del eje $\hat{z}$. Lo que obtendremos de esto, es un plano infinito, pero ahora la corriente apunta en la dirección $-\hat{y}$, esto es, hacia la izquierda. El campo que propusimos también va a rotar de la misma manera, por lo que para este nuevo sistema, el campo que supusimos apuntaba en $\hat{x}$, va a apuntar en $-\hat{x}$. La componente en $\hat{z}$ no se verá modificada. Esta operación no es una simetría por si sola, porque no obtuvimos el mismo sistema que el de partida. Ahora tenemos la corriente apuntando para el otro lado. Esto lo podemos corregir usando el siguiente truco. Si miramos la ecuación de Biot-Savart, vemos que si invertimos todas las corrientes, lo único que obtendremos es un signo menos global en el campo. Por lo tanto, podemos en este caso poner la corriente hacia la derecha si invertimos todas las componentes de nuestro campo en el proceso. Si hacemos eso, obtenemos el resultado de la derecha de la figura 2. Ahora vemos que el campo que propusimos en dirección $\hat{z}$ apunta en $-\hat{z}$ y el campo que apuntaba en $-\hat{x}$ ahora apunta en $\hat{x}$. Estas dos operaciones juntas si son una simetría, porque obtuvimos el mismo plano del que partimos. Pero si comparamos el campo que propusimos a la entrada y a el que obtuvimos a la salida, vemos que la componente en $\hat{z}$ está al revés! Esto significa que no es posible que un objeto que responda a esta simetría tenga una componente de campo en la dirección $\hat{z}$. Lo logramos! El campo ahora queda escrito

$$\vec{B} = B_x(z)\hat{x}. \tag{5}$$

Con esto ya podemos aplicar la ley de Ampere para calcular el campo como hicimos en la clase.

2. Solenoide infinito

Ahora nuestro sistema es un solenoide infinito. El mismo, como se acordarán, lo vamos a modelar como una superposición de espiras circulares por las cuales circula la misma corriente I, como se ve en la figura 3.

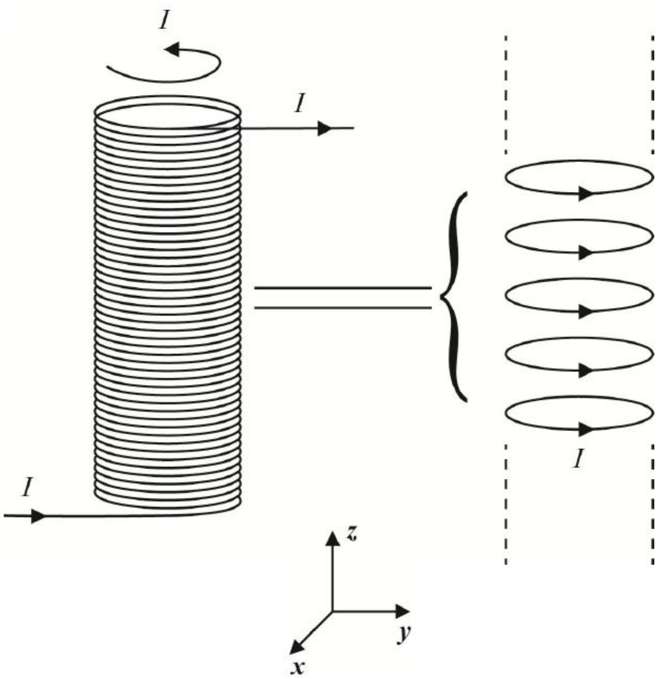

Figura 3: Sistema de estudio: solenoide infinito modelado como superposición de espiras circulares

Volvamos a estudiar nuestras simetrías desde la ecuación general 1, pero ahora escrita en coordenadas cilíndricas.

$$\vec{B} = B_r(r,\theta,z)\hat{r} + B_\theta(r,\theta,z)\hat{\theta} + B_z(r,\theta,z)\hat{z}. \tag{6}$$

Empezamos con las dependencias funcionales: como el plano es infinito, es invariante ante traslaciones en la dirección $\hat{z}$. Lo mismo ocurre si realizamos rotaciones de cualquier ángulo θ alrededor del eje $\hat{z}$. De estas dos simetrías obtendremos que el campo no puede depender de z ni de la coordenada angular. Solo nos sobrevive la dependencia funcional en r. Escribimos entonces

$$\vec{B} = B_r(r)\hat{r} + B_\theta(r)\hat{\theta} + B_z(r)\hat{z}. \tag{7}$$

Al igual que antes, si nos trasladamos en r, nos vamos a acercar o alejar del solenoide, así que no podemos decir nada a priori sobre esta dependencia. Pasemos a lo divertido: que operaciones de simetría podemos usar para saber en qué dirección apunta nuestro campo. Bueno, vamos a hacer un argumento muy parecido al del plano. La simetría ahora esta representada en la figura 4. La simetría ahora va a ser la siguiente: una rotación de 180 grados alrededor del versor $\hat{r}$ más una inversión de la corriente. Hagámoslo paso a paso.

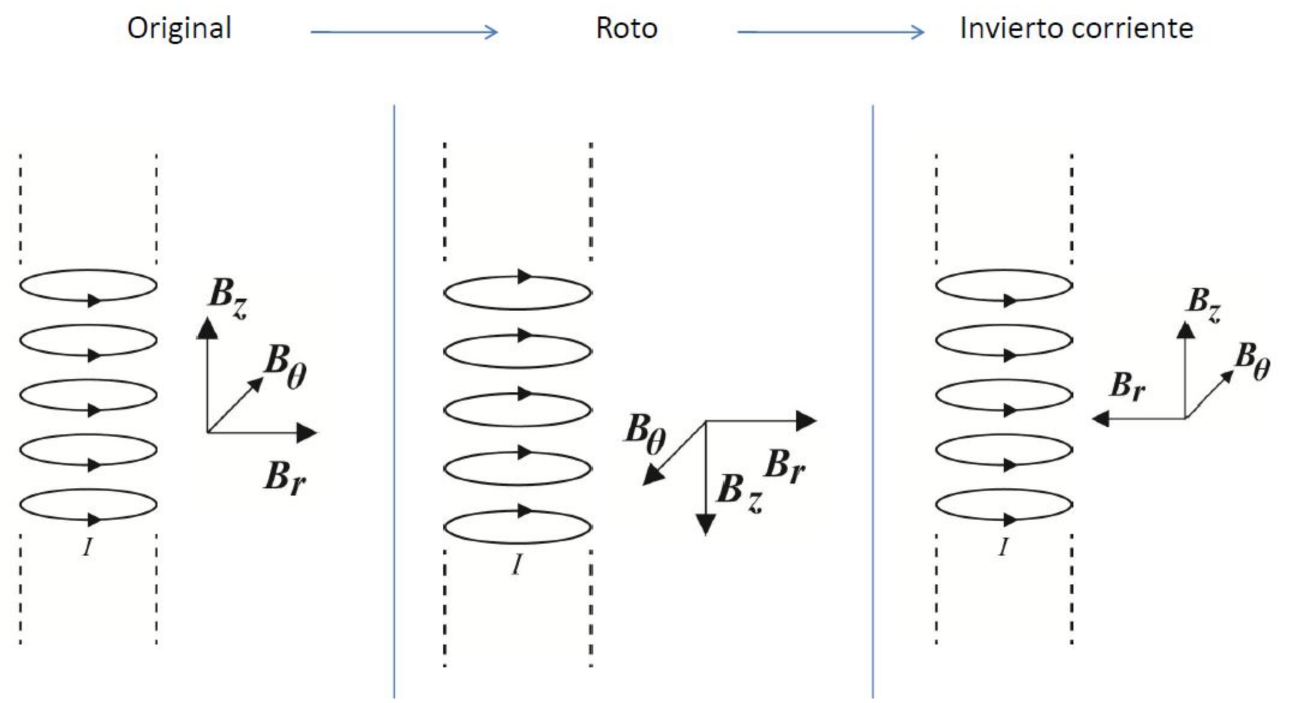

Figura 4: Operaciones de simetría para determinar la dirección del campo en un solenoide infinito.

Empezamos por pararnos en un punto arbitrario y suponer que el campo tiene componente en las tres direcciónes. Ahora realizo la primera rotación de 180 grados alrededor de $\hat{r}$. Vemos que el versor $\hat{r}$ se conserva, pero tanto $\hat{\theta}$ como $\hat{z}$ se invirtieron en la rotación. Si nos fijamos, esto no es una simetría para nuestro solenoide, porque la corriente ahora circula en la dirección opuesta! Tenemos que hacer el mismo truco entonces que hicimos con el plano. Si invertimos la corriente, tenemos que invertir todas las componentes de nuestro campo. Eso es lo que vemos a la derecha de la figura 4. Ahora vemos que la corriente apnta igual que en el original, el campo en $\hat{\theta}$ y $\hat{z}$ es consistente al inicial, pero el campo en $\hat{r}$ apunta en la dirección opuesta. Esta contradicción quiere decir que nuestro sistema no puede tener una componente apuntando en $\hat{r}$. Por lo tanto, nuestro campo ahora solo podrá apuntar en $\hat{\theta}$ y $\hat{z}$. Escribimos entonces

$$\vec{B} = B_\theta(r)\hat{\theta} + B_z(r)\hat{z}. \tag{8}$$

Ahora, en la práctica les pedí que me creyeran que $\vec{B} = B_z(r)\hat{z}$. ¿Qué pasa con la parte en $\hat{\theta}$? Esta no la podemos descartar por argumentos de simetría. Lo que tenemos que hacer para descartar esta componente es una evaluación de la ley de Ampere. Pensemos una curva que es un círculo concéntrico con nuestro solenoide de radio R, como se muestra en la figura 5. La ley de ampere nos dice que

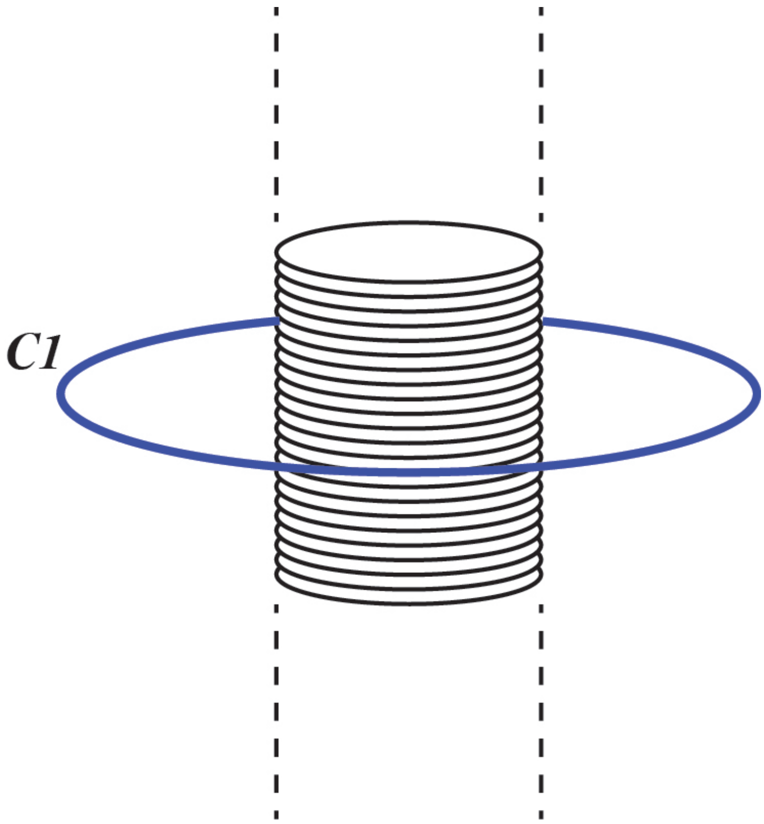

Figura 5: Curva de Ampere alrededor del solenoide.

$$\oint_{C1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o I_{enc}. \tag{9}$$

Como nuestro desplazamiento $d\vec{l}$ es perpendicular a $\hat{z}$ en toda nuestra curva, cuando evaluemos $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ solo nos sobrevivirá $B_\theta(r)\hat{\theta}$. Como también la curva tiene r constante, el campo es constante en toda la curva y sale afuera de la integral. Obtenemos entonces

$$\mu_o I_{enc} = \oint_{C1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_\theta(R) \int_{C1} dl = 2\pi R B_\theta(R). \tag{10}$$

Solo nos falta calcular la corriente encerrada. Para esto recordamos que tenemos que ver cual es la corriente que atraviesa la superficie definida por nuestra curva (esto es, el circulo adentro de $C1$). Como nuestra corriente vive justamente en ese plano, no atraviesa el circulo en ningun punto (es paralela al circulo en todo punto), y luego $I_{enc} = 0$. Con esto podemos concluir $B_\theta = 0$. Juntando todo esto tenemos hasta ahora que

$$\vec{B} = B(r)\hat{z}, \tag{11}$$

que es donde arrancamos en la clase.