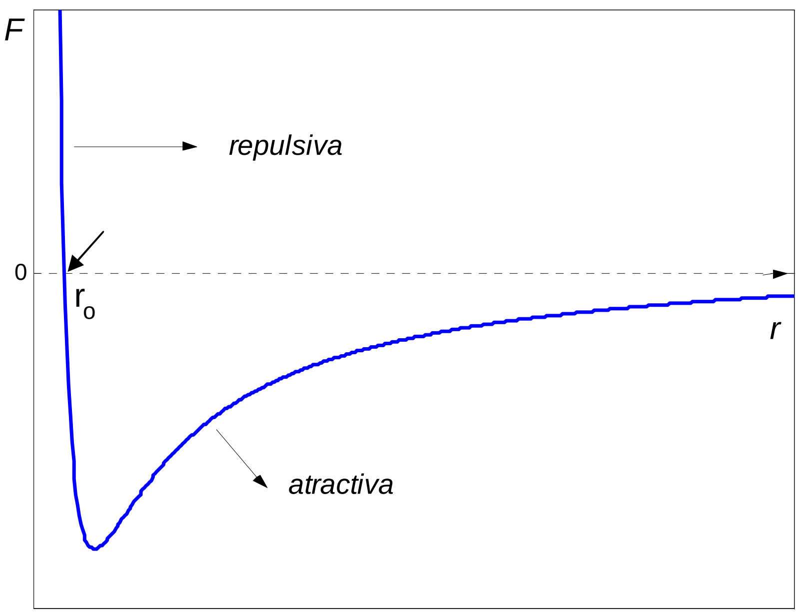
LEY DE HOOKE - OSCILACIONES

Fuerzas intermoleculares

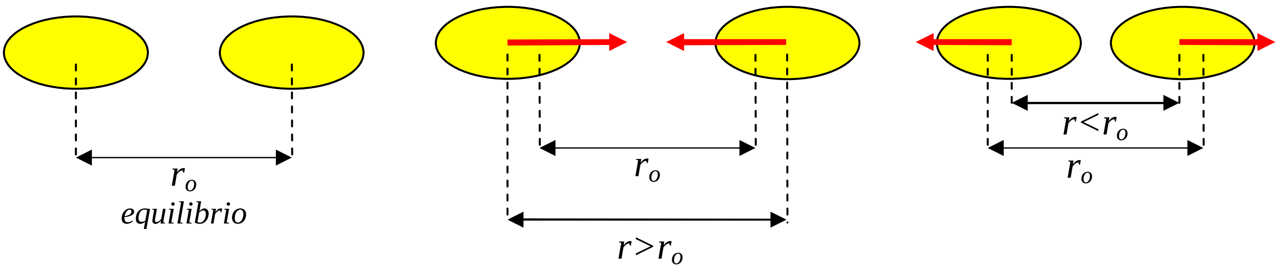
Vamos a adentrarnos un poco más en la materia. Vimos que el origen de las interacciones de rozamiento se debe a las irregularidades de las superficies en contacto. Si las superficies fuesen perfectamente lisas, la única fuerza de contacto sería la normal, y no existirían fuerzas de rozamiento. Ahora bien, ¿cuál es el origen último de estas fuerzas “de contacto”? Si observáramos ambas superficies a nivel molecular, veríamos que no existe un “contacto” real, sino que son las interacciones a distancia entre las moléculas las responsables de que un cuerpo sólido no puedo penetrar en otro.

Las fuerzas intermoleculares no se pueden explicar clásicamente en forma satisfactoria. No son fuerzas “fundamentales” en el sentido en que lo es, por ejemplo, la fuerza gravitatoria, sino que se deben a la bastamente compleja interacción entre todos los electrones y núcleos de una molécula con los de otra. Esta interacción es, en general, de origen electrostático a distancias grandes (comparadas con las dimensiones moleculares), y de origen cuántico a distancias cortas. Si se suman todos los efectos posibles, se obtiene que la fuerza entre dos moléculas es función de la distancia entre ambas (ver figura).



Son fuerzas atractivas para grandes distancias (donde predominan los efectos electrostáticos), si bien rápidamente tienden a cero, pero se vuelven sumamente repulsivas para distancias cortas (donde predominan los efectos cuánticos). Esto último es lo que impide, en última instancia, que caigamos a través del suelo y, por lo tanto, lo que origina las fuerzas que, macroscópicamente, llamamos de contacto.

Observemos algo más. Existe cierta distancia r_o para la cual la fuerza intermolecular es nula, es decir, para la cual las moléculas están en equilibrio. Si se intenta acercar a ambas moléculas, éstas se repelerán, mientras que, si se las aleja, se atraerán.



En toda instancia, las fuerzas son tales que el sistema trata de volver a la posición de equilibrio, esto es, se trata de una posición de equilibrio *estable*. Eso mismo se puede determinar observando que la pendiente de *F(r)*, $\left.\frac{dF}{dr}\right|_{r=r_o}$, es negativa alrededor de la posición de equilibrio r_o. Si el apartamiento respecto de la posición de equilibrio es pequeño, la porción de curva comprendida también es pequeña y se puede aproximar por una línea recta. Esto es equivalente a considerar que, como nos estamos moviendo a posiciones muy cercanas a la posición r_o, podemos hacer un desarrollo en serie de $F(r \sim r_o)$ y cortar el desarrollo a primer orden:

$$F(r \approx r_o) \cong \underbrace{F(r_o)}_{=0} + \left.\frac{dF}{dr}\right|_{r=r_o} (r - r_o)$$

$$F(r \approx r_o) \cong \left.\frac{dF}{dr}\right|_{r=r_o} (r - r_o)$$

Es decir, bajo estas circunstancias, *la fuerza es proporcional al desplazamiento respecto de la posición de equilibrio estable*. Esto último se conoce como *ley de Hooke* o de la elasticidad, que dice que la fuerza sobre un cuerpo que trata de restaurarlo a su condición original cuando éste ha sufrido alguna distorsión es proporcional a la distorsión. Por supuesto, esto tiene un rango de validez limitado, ya que si la distorsión es muy grande, nos salimos de la zona donde es válida la aproximación lineal y la distorsión puede se permanente. Otro caso, emparentado con el anterior, en el que esta aproximación puede ser válida es el de las vibraciones en una red cristalina (observar la analogía). Los desplazamientos atómicos respecto de sus posiciones de equilibrio son pequeños y el sistema puede tratarse como si las fuerzas entre ellos fueran proporcionales a los desplazamientos (claro que, un sistema así no puede tratarse clásicamente).

Existen muchos ejemplos en la naturaleza de fuerzas que obedecen a este tipo de ley. Para estudiar el movimiento resultante de la aplicación de una fuerza de este tipo sobre un sistema, vamos a considerar un sistema modelo –una masa unida a un resorte ideal-, pero teniendo en cuenta que, en realidad, vamos a estar estudiando una cantidad de fenómenos que obedecen a la misma ley. La ecuación de movimiento que vamos a estudiar en detalle va a ser similar a, casos tan diversos como, por ejemplo:

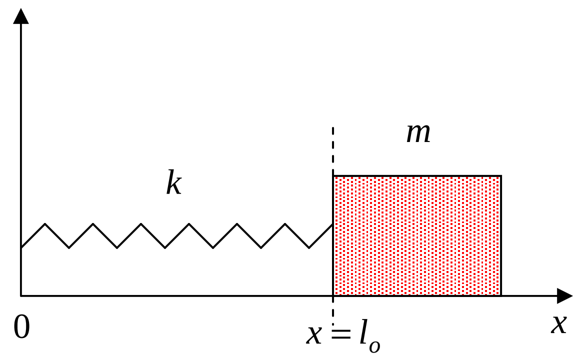
- Las vibraciones de un diapasón que producen ondas de sonido,
- Las oscilaciones de un ecosistema,
- Las vibraciones de los electrones en un átomo,
- Las vibraciones de los átomos en una red cristalina

Si bien los dos últimos mencionados no pueden tratarse clásicamente, todos ellos constituyen *sistemas oscilantes*.

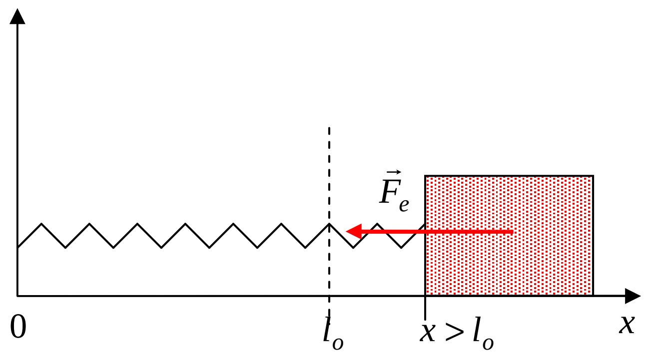
Oscilador armónico simple

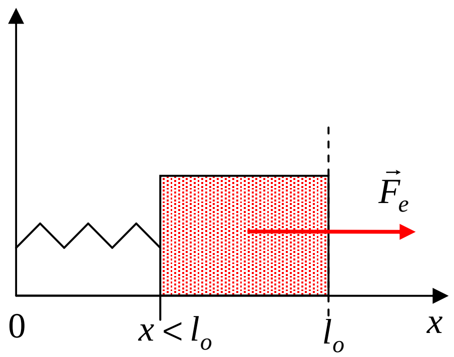
Las oscilaciones armónicas simples son movimientos periódicos tales que la coordenada de movimiento tiene una dependencia con el tiempo que es *armónica* (es decir, que puede escribirse como un coseno o un seno). Así, la coordenada de movimiento varía entre dos posiciones extremas, que se denominan *puntos de retorno*. Como vamos a ver, las fuerzas que producen este tipo de movimiento se describen con expresiones que responden a la ley de Hooke.

- Consideremos una masa unida a un resorte ideal como sistema modelo para estudiar este tipo de movimiento. Un resorte ideal es aquél tal que su masa puede tomarse como despreciable (es decir, no modifica la dinámica del sistema). En ese sentido, puede considerarse como un elemento que representa la fuerza aplicada al sistema. Caractericemos al resorte con una *constante elástica* k ($k = -\left.\frac{dF}{dr}\right|_{r=r_o}$ de la sección anterior), y una *longitud en reposo* l_o (aquella longitud para la cual el resorte no aplica ninguna fuerza sobre el sistema).



Longitud en reposo o natural: el resorte tiene una longitud característica l_o, para la cual, la fuerza que aplica sobre la masa *m* es nula.





Como se vio en la sección anterior, una fuerza del tipo de la ley de Hooke es proporcional al desplazamiento respecto de la posición de equilibrio, y se opone a éste. En el caso de la fuerza que ejerce un resorte, fuerza elástica $\vec{F}_e$, el desplazamiento está dado por la elongación del resorte, es decir, cuánto se encuentra estirado o contraído respecto de su longitud en reposo. En el caso que estamos considerando (ver figura), será:

$$\vec{F}_e = -k(x - l_o)\hat{x}$$

y la constante de proporcionalidad esta dada por la constante elástica del resorte, *k*.

Notar que, si la coordenada *x* se hubiera medido a partir de l_o, dicha coordenada hubiese representado directamente la elongación. Notar, asimismo, que la expresión de la $\vec{F}_e$ que hemos escrito representa tanto la situación en la que el resorte está estirado como comprimido y que el signo negativo delante de la expresión se debe a la particular forma de tomar el eje coordenado.

- Vamos a encontrar la ecuación de movimiento (EM). Para ello, planteamos el segundo principio en la dirección de la coordenada de movimiento *x*:

$x) F_e = m\ddot{x} \Rightarrow \quad -k(x - l_o) = m\ddot{x}$

Para "reconocer" la EM, conviene ordenarla de tal manera que todo lo que depende de la coordenada y sus derivadas quede en un miembro de la ecuación, y lo demás, en el otro miembro. Asimismo, liberamos a la derivada de mayor rango (derivada segunda) de sus factores constantes:

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}l_o}$$

Vamos a llamar *pulsación* $\omega_o = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Entonces:

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_o^2 x = \omega_o^2 l_o}$$

La EM que obtuvimos es un caso particular de una familia de ecuaciones diferenciales que se denominan *ecuaciones diferenciales de Euler*:

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t)\begin{cases} f(t) = 0 \Rightarrow & \text{homogénea} \\ f(t) \neq 0 \Rightarrow & \text{inhomogénea} \end{cases}$$

La función $f(t)$ se denomina la *inhomogeneidad* de la ecuación (ya que no depende de x ni de sus derivadas, sino solo del tiempo). En nuestro caso, se trata de una ecuación de Euler *inhomogénea*, que presenta una inhomogeneidad constante:

$f(t) = \omega_o^2 l_o \equiv cte$

- Este tipo de ecuación diferencial es *lineal*, es decir, ni la variable ni sus derivadas se encuentran elevadas a ninguna potencia. Esta característica hace que la solución más general sea una combinación lineal de todas las posibles soluciones.
- En el caso de las ecuaciones de Euler, la solución general es:

$x(t) = x_H(t) + x_P(t)$

donde:

- ➢ $x_H(t)$ es la solución de la ecuación homogénea $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$
- ➢ $x_P(t)$ es una solución *particular*. En general, se plantea una función del tiempo del mismo tipo que la inhomogeneidad $f(t)$.

Veamos, entonces, cómo se encuentran estas dos soluciones en nuestro caso:

❖ ***Solución de la ecuación homogénea*** $x_H(t)$***:***

$\ddot{x}_H + \omega_o^2 x_H = 0$ o bien: $\ddot{x}_H = -\omega_o^2 x_H$

Si observamos con atención la ecuación, vemos que la solución $x_H(t)$ debe ser una función tal que derivándola dos veces nos debe dar *proporcional a la misma función*. La función que cumple con esta propiedad es la función exponencial:

$$x_H(t) \approx e^{\lambda t}$$

En general, todas las ecuaciones homogéneas de Euler tienen soluciones de este tipo. Falta saber quién es λ. Para ello, introducimos la solución propuesta en la ecuación homogénea y encontramos para qué valores de λ se verifica:

$$\ddot{x}_H + \omega_o^2 x_H = 0$$
$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_o^2 e^{\lambda t} = 0$$
$$(\lambda^2 + \omega_o^2) e^{\lambda t} = 0$$

Esta ecuación debe cumplirse *para todo tiempo*. Luego, la única manera es que la expresión entre paréntesis sea igual a cero:

$(\lambda^2 + \omega_o^2) = 0 \Rightarrow$ *ecuación característica*: nos da dos posibles valores de λ:

$$\Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-\omega_o^2} = \begin{cases} \lambda_1 = i\omega_o \\ \lambda_2 = -i\omega_o \end{cases}$$

Es decir que, $x_H(t)$ será una combinación lineal de $e^{i\omega_o t}$ y $e^{-i\omega_o t}$:

$$x_H(t) = C_1 e^{i\omega_o t} + C_2 e^{-i\omega_o t}$$

donde *i* es la unidad imaginaria.

- *C₁* y *C₂* son dos constantes a determinar: las constantes de integración. Notar que, resolver una ecuación diferencial significa *integrar* la ecuación para encontrar la variable. Como la derivada de mayor rango de nuestra ecuación es una derivada segunda, es como si hubiéramos integrado dos veces. En cada integración, se obtiene una constante de integración. La forma de determinar estas constantes es, de igual forma que cuando se hace integración directa, con las condiciones iniciales del problema, aplicadas a la *solución general* (no a la solución homogénea, ya que ésta es solo una parte de la solución).
- Tal como queda escrita la solución, parece una función compleja. Debe entenderse que, al aplicar un método matemático para resolver una ecuación, se obtienen *todas las soluciones posibles.* De todas ellas, es menester quedarse con aquéllas que tienen

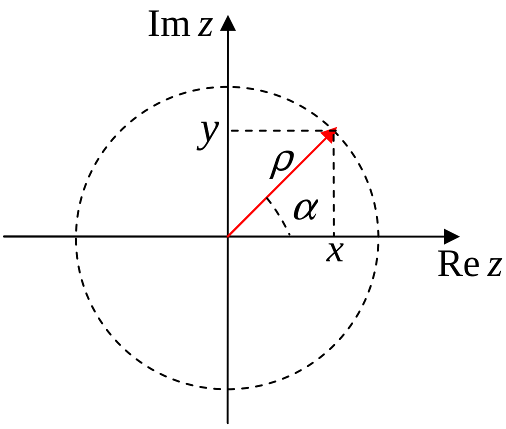
significado para el problema físico que estamos resolviendo. En nuestro caso, la solución debe ser real, por lo que, seguramente, las constantes C_1 y C_2 resultarán complejas.

- Sin embargo, la solución tal como la encontramos, en este caso, no es muy práctica, ya que no nos permite "visualizar" fácilmente el movimiento. Debemos buscar, entonces, formas alternativas. Para ello, usamos la fórmula de Moivre[1]:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i sen\alpha$$
$$e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i sen\alpha$$

Nota sobre números complejos:

$z = \rho e^{i\alpha}$ es una forma alternativa de escribir un número complejo. Si representamos en ejes ortogonales las partes real e imaginaria de un complejo $z = x + iy$:



$$\mathrm{Re}\, z = x = \rho\cos\alpha$$
$$\mathrm{Im}\, z = y = \rho sen\alpha$$

Luego, de acuerdo a la fórmula de Moivre:

$$z = \mathrm{Re}\, z + i\,\mathrm{Im}\, z = \rho(\cos\alpha + i sen\alpha)$$
$$z = \rho e^{i\alpha}$$

Donde:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$tg\alpha = \frac{y}{x}$$

Notar que $e^{i\alpha}$ es, entonces, un complejo de módulo 1.

Usando la fórmula de Moivre y las propiedades de las funciones trigonométricas, se llega a que la solución de la homogénea puede escribirse, equivalentemente, en cualquiera de estas formas:

$$\boxed{x_H(t) = \left\{ \begin{array}{l} 1) C_1 e^{i\omega_o t} + C_2 e^{-i\omega_o t} \\ 2) A\cos(\omega_o t + \varphi) \\ 3) Bsen(\omega_o t + \varphi') \\ 4) A_1 \cos\omega_o t + B_1 sen\omega_o t \end{array} \right\}}$$

no son cuatro soluciones diferentes, sino *cuatro formas de escribir la misma solución.*

[1] La formula de Moivre puede demostrarse haciendo el desarrollo en serie a orden infinito de las funciones involucradas y verificando que se cumple la igualdad.

La equivalencia entre todas las soluciones es muy sencilla de demostrar. Por ejemplo, partamos de la primera:

$$x_H(t) = C_1 e^{i\omega_o t} + C_2 e^{-i\omega_o t} = C_1(\cos\omega_o t + isen\omega_o t) + C_2(\cos\omega_o t - isen\omega_o t) =$$
$$= (C_1 + C_2)\cos\omega_o t + i(C_1 - C_2)sen\omega_o t = A_1\cos\omega_o t + B_1 sen\omega_o t$$

con $A_1 = C_1 + C_2$ y $B_1 = i(C_1 - C_2)$, llegando a la cuarta forma propuesta.

También, si consideramos:

$$A\cos\varphi = C_1 + C_2$$
$$-Asen\varphi = i(C_1 + C_2)$$

llegamos a:

$$x_H(t) = C_1 e^{i\omega_o t} + C_2 e^{-i\omega_o t} = A(\cos\varphi\cos\omega_o t - sen\varphi sen\omega_o t) = A\cos(\omega_o t + \varphi)$$

es decir, a la segunda de las fórmulas propuestas.

- Notar, finalmente, que cualquiera de las soluciones propuestas tiene dos constantes de integración. Sin embargo, antes de determinarlas, debemos encontrar la solución particular.

❖ ***Solución particular*** $x_P(t)$

Dijimos que $x_P(t)$ tiene que ser una función similar a la inhomogeneidad $f(t)$. En nuestro caso, la inhomogeneidad es una constante, por lo tanto:

$$x_P(t) = C \equiv cte$$

Determinamos C. $x_P(t)$ es solución de nuestra EM; por lo tanto:

$$\underbrace{\ddot{x}_P}_{0} + \omega_o^2 x_P = \omega_o^2 l_o$$

$$\omega_o^2 C = \omega_o^2 l_o \Rightarrow \quad \boxed{C = l_o}$$

Observemos lo siguiente: en este caso, en que la inhomogeneidad es constante y, por lo tanto, $x_P(t) = C \equiv cte$, se cumple que $\ddot{x}_P = 0$. Es decir que x_P es la *posición de equilibrio del sistema* (o, está relacionada con ella).

❖ ***Solución general*** $x(t)$

La solución general es, entonces (eligiendo alguna de las formas posibles de $x_H(t)$; por ejemplo, la segunda de ellas):

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t)$$

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega_o t + \varphi) + l_o}$$

Ahora sí podemos determinar A y φ. ¿Por qué recién ahora? Las dos constantes se encuentran considerando cada problema en particular. Por ejemplo, considerando las condiciones iniciales de nuestro problema (es obvio que las condiciones iniciales se aplican a $x(t)$, que es la solución total). Como tenemos que determinar dos constantes, necesitamos dos condiciones.

Por ejemplo:

$$\text{A } t = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1) x(t=0) = x_o \\ 2) v(t=0) = \dot{x}(t=0) = v_o \end{cases}$$

Planteamos:

$$1) x(t=0) = x_o = A\cos\varphi + l_o \Rightarrow x_o - l_o = A\cos\varphi$$

$$2) \dot{x}(t=0) = v_o = -A\omega_o sen\varphi \Rightarrow -\frac{v_o}{\omega_o} = Asen\varphi$$

Resulta:

$$A = \frac{x_o - l_o}{\cos\varphi} \qquad tg(\varphi) = -\frac{v_o}{\omega_o(x_o - l_o)}$$

De los dos posibles valores de φ, se elige aquél tal que $A > 0$. Notar:

- A es la elongación máxima que sufre el resorte, esto es, la *amplitud* del movimiento.
- φ es un corrimiento que tiene en cuenta que, a $t = 0$, el sistema tenía cierta velocidad no nula (en nuestro caso, $v_o = 0 \Rightarrow \varphi = 0$). φ se denomina *fase inicial*.

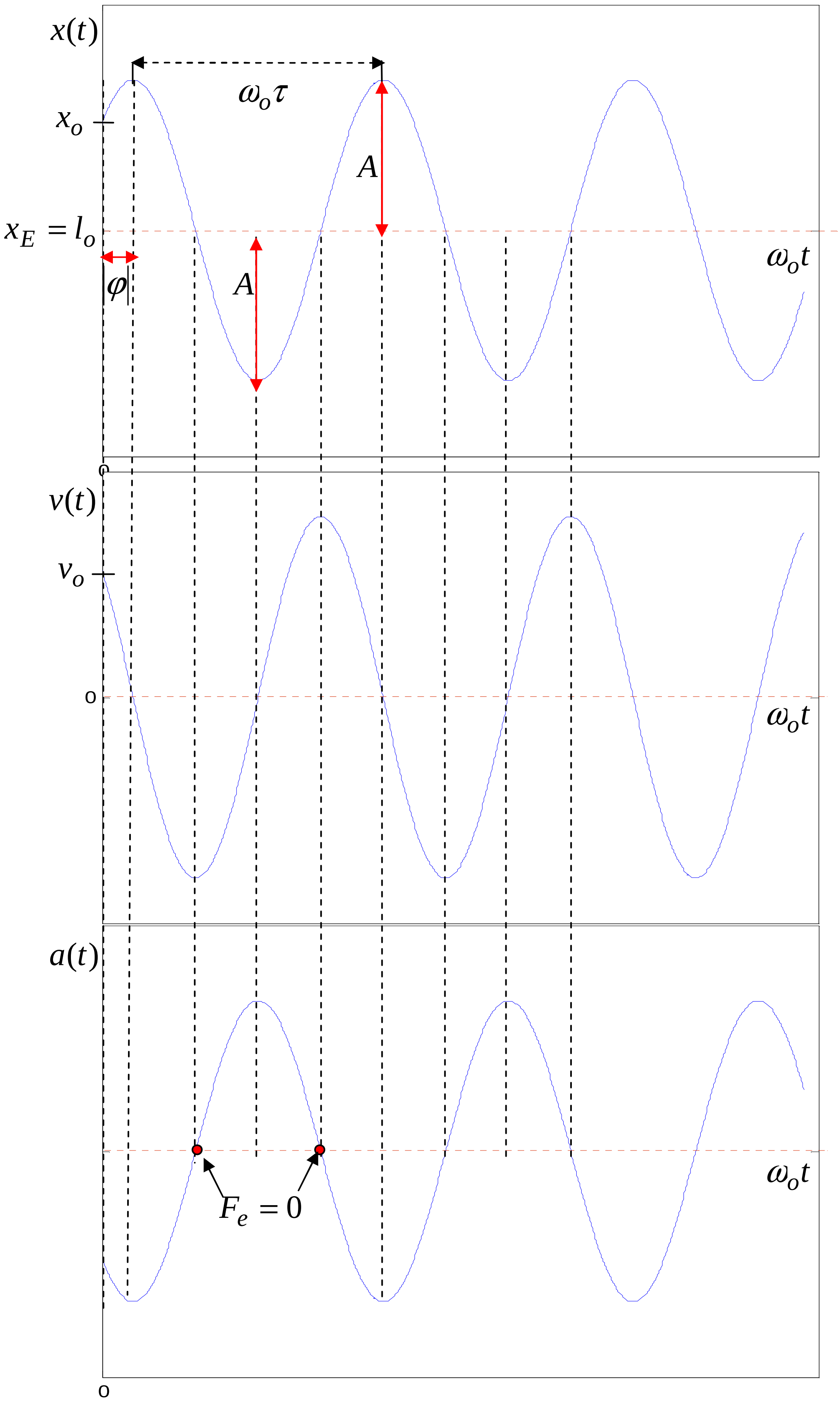
- El movimiento resultante es *oscilatorio* y se denomina *movimiento armónico simple*.

El sistema oscila alrededor de la posición de equilibrio (estable) $x_E = l_o$. Encontremos la velocidad y la aceleración en cada instante:

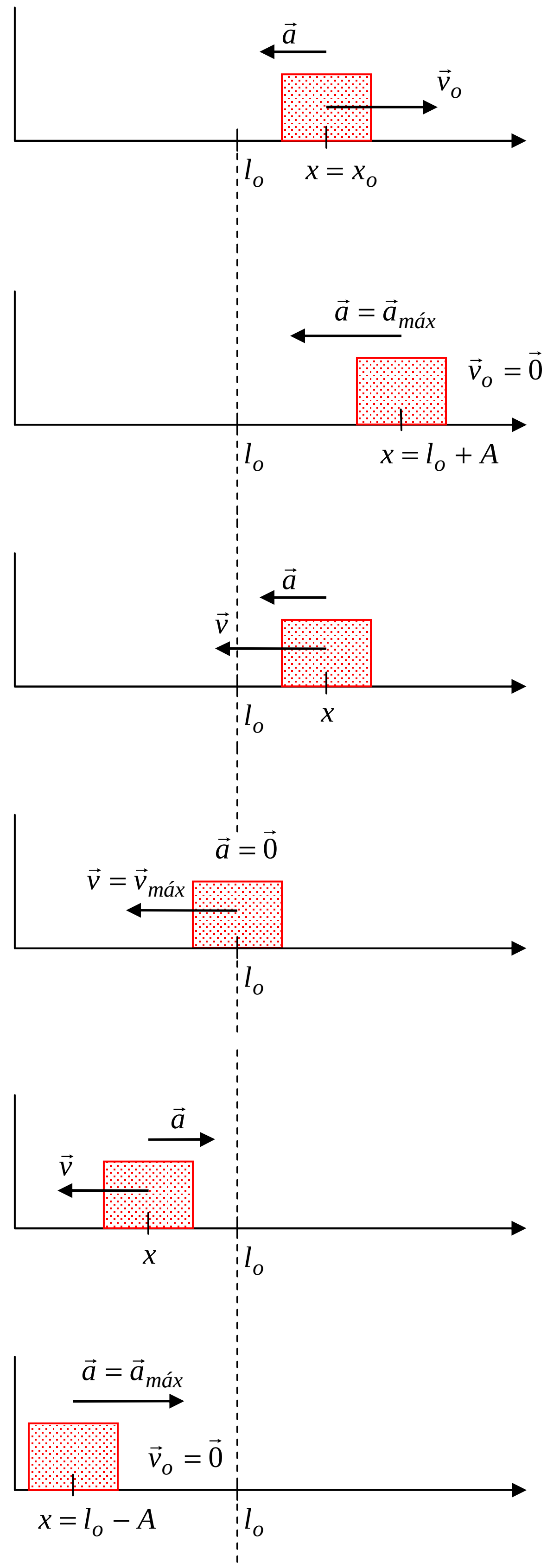
$$v(t) = \dot{x}(t) = -A\omega_o sen(\omega_o t + \varphi)$$
$$a(t) = \ddot{x}(t) = -A\omega_o^2 \cos(\omega_o t + \varphi)$$

- Graficamos $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ en función de $\omega_o t$. Notar:

- El desfasaje inicial se debe a que $v(t=0) \neq 0$. La pendiente en $t = 0$ nos da v_o.
- En los puntos de retorno (amplitud máxima del movimiento), $v = 0$ y $|a|$ máxima.
- Al pasar por la posición de equilibrio, $a = 0$ y $|v|$ máxima.



$x(t)$
$\omega_o\tau$
x_o
A
$x_E = l_o$
φ
A
$\omega_o t$
o
$v(t)$
v_o
o
$\omega_o t$
$a(t)$
$F_e = 0$
$\omega_o t$
o


$\vec{a}$
$\vec{v}_o$
l_o
$x = x_o$
$\vec{a} = \vec{a}_{máx}$
$\vec{v}_o = \vec{0}$
l_o
$x = l_o + A$
$\vec{a}$
$\vec{v}$
l_o
x
$\vec{a} = \vec{0}$
$\vec{v} = \vec{v}_{máx}$
l_o
$\vec{a}$
$\vec{v}$
x
l_o
$\vec{a} = \vec{a}_{máx}$
$\vec{v}_o = \vec{0}$
$x = l_o - A$
l_o

- Es un movimiento periódico. Calculemos el período τ :

$$\left.\begin{array}{l} x(t_1) = A\cos(\omega_o t_1 + \varphi) + l_o \\ x(t_1+\tau) = A\cos(\omega_o (t_1+\tau) + \varphi) + l_o \end{array}\right\} x(t_1) = x(t_1+\tau)$$

Después de un tiempo τ , el argumento del coseno se incrementará en 2π :

$$\omega_o (t_1+\tau) + \varphi = \omega_o t_1 + \varphi + 2\pi$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

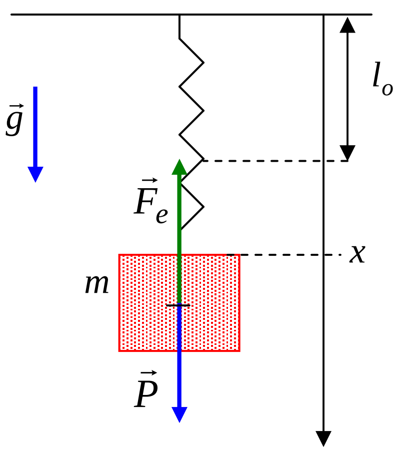
Notar que, cuanto mayor es la masa (es decir, la inercia), de la partícula, más tiempo tarda en completar un ciclo, mientras que ese tiempo disminuye cuanto mayor sea la constante elástica.

- Notar, finalmente, que de esta EM,

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = \omega_o^2 l_o$$

podemos extraer, sin resolverla, cuál es la posición de equilibrio (de la inhomogeneidad constante, $x_E = l_o$) y cuál el período del movimiento (de la pulsación, $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega_o}$)

- Planteamos ahora el siguiente caso: la masa unida al mismo resorte ideal, que cuelga del techo y solo puede moverse en dirección vertical.



Tal como planteamos nuestro eje x ,

$$\vec{F}_e = -k(x - l_o)\hat{x}$$

La ecuación dinámica resulta:

$$x)P - k(x - l_o) = m\ddot{x}$$

Reordenando como en el caso anterior:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = g + \frac{k}{m}l_o$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_o^2 x = g + \omega_o^2 l_o}$$

La EM resultó totalmente análoga a la anterior. ¿Qué es lo que cambió? La solución particular y, por lo tanto, la posición de equilibrio. La nueva posición es $x_E = l_o + \frac{g}{\omega_o^2}$.

La fuerza peso "corre" la posición de equilibrio y el sistema va a oscilar alrededor de esta nueva posición. Por su parte, como se observa de la EM, el período es el mismo que en el caso anterior.

Nota: ¿Qué tipo de movimiento se obtiene si la EM es de la forma $\ddot{x} - \omega_o^2 x = 0$ *?*

La única diferencia formal con la EM que hemos resuelto es que el coeficiente que acompaña a la variable es *negativo*. Veamos cómo se comporta la solución de la homogénea.

Nuevamente, $x(t)$ es de la forma $e^{\lambda t}$. Si planteamos la ecuación característica:

$$(\lambda^2 - \omega_o^2) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\omega_o \quad \in \mathbf{R}$$

Por lo tanto, la solución es:

$$x(t) = C_1 e^{\omega_o t} + C_2 e^{-\omega_o t}$$

Recordando que:

$$ch\alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$$

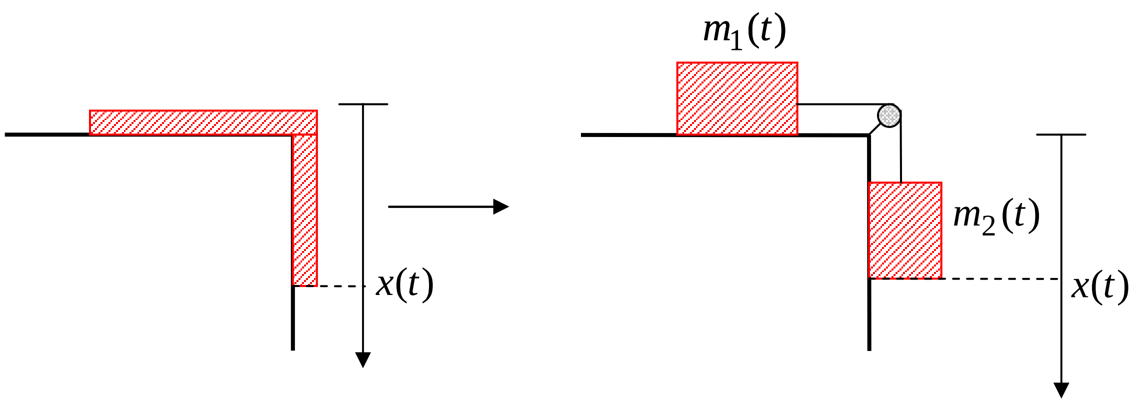
$$sh\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$$

la solución puede escribirse de cualquiera de estas formas:

$$x(t) = \begin{cases} 1) C_1 e^{\omega_o t} + C_2 e^{-\omega_o t} \\ 2) A ch(\omega_o t + \varphi) \\ 3) B sh(\omega_o t + \varphi') \\ 4) A_1 ch\omega_o t + B_1 sh\omega_o t \end{cases}$$

La solución de la EM no es un movimiento periódico, sino que $x(t)$ crece o decrece monótonamente con el tiempo.

- *Ejemplo*: Este tipo de movimiento corresponde, por ejemplo, al de una soga que desliza por el borde de una mesa, sin rozamiento.



Como todos los puntos de la soga se van a mover con la misma aceleración, basta decir cómo se mueve un solo punto; por ejemplo, el extremo de la soga. El problema puede pensarse planteando un modelo como muestra la figura. Las dos porciones de soga, la que descansa sobre la mesa y la que cuelga, se mueven vinculadas. Ambas tienen masas que van cambiando con el tiempo, pero de tal manera que la masa total se mantiene constante. Esto es equivalente a tener dos cuerpos vinculados por una soga de masa despreciable, de tal manera que la masa de los cuerpos va variando con el tiempo. El punto crucial es definir cómo van variando las masas de ambos cuerpos. Supongamos que la soga es homogénea y tiene una dimensión dominante (su longitud, l, frente a las otras dos. Definimos, entonces, una *densidad de masa en longitud* $\lambda = \frac{dm}{dl}$. Como la soga es homogénea, $\lambda = cte$. Entonces:

$m_1(t) = \lambda(l - x(t))$ $\rightarrow$ equivalente a la porción de soga que se encuentra sobre la mesa.

$m_2(t) = \lambda x(t)$ $\rightarrow$ equivalente a la porción de soga que cuelga.

Planteamos las ecuaciones dinámicas:

$$\left.\begin{aligned} T &= m_1(t)\ddot{x} = \lambda(l-x)\ddot{x} \\ P_2 - T &= m_2(t)\ddot{x} = \lambda x\ddot{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda x g - \lambda(l-x)\ddot{x} = \lambda x\ddot{x}$$

Acomodando los términos, resulta:

$$\boxed{\ddot{x} - \frac{g}{l}x = 0}$$

Imponiendo, como condiciones iniciales: $\begin{cases} x(t=0) = l_o \\ \dot{x}(t=0) = 0 \end{cases}$

Resulta, finalmente:

$$\boxed{x(t) = l_o ch(\sqrt{\frac{g}{l}}t)}$$

y la velocidad:

$$\dot{x}(t) = l_o \sqrt{\frac{g}{l}} sh(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$$

Se observa que la porción que cuelga de la soga crece monótonamente, con una velocidad que también aumenta monótonamente.

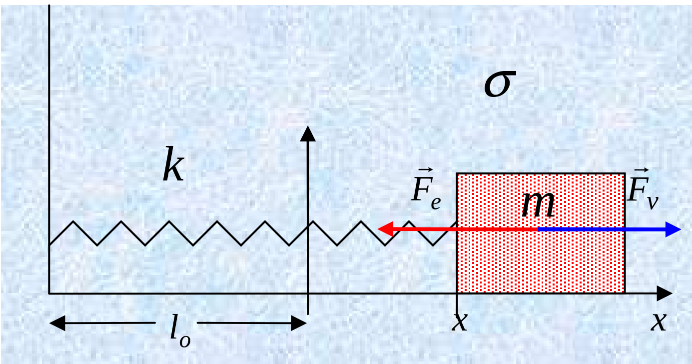
-----------------⏭ 🗲 ⏮-----------------

Oscilador amortiguado

Como vimos en el capítulo de dinámica, si nuestro sistema oscila en aire o, en general, inmerso en algún fluido, sufre una interacción con éste que es similar a la del rozamiento entre dos superficies. A velocidades bajas[2] (cuando el fluido puede considerarse *laminar*, es decir, que se mueve en capas ordenadas) el fluido aplica sobre el objeto una fuerza que se opone al movimiento y que depende de la *viscosidad*[3] del fluido y de la velocidad del objeto en movimiento. Recordemos que, si esta velocidad es suficientemente baja, la *fuerza viscosa* $\vec{F}_v$ puede escribirse como:

$$\vec{F}_v = -\sigma\,\vec{v}$$

es decir, como un desarrollo a primer orden (debido a que $\vec{v}$ es baja) en la velocidad. La constante de proporcionalidad σ es la *constante de viscosidad* del fluido.



Vamos a estudiar el movimiento resultante para nuestro sistema modelo, ahora inmerso en un medio viscoso, caracterizado por una constante de viscosidad.

Imaginemos, por ejemplo, el movimiento de un oscilador en aire y, el mismo, en un fluido viscoso, como miel o aceite. Intuitivamente, podemos ver que existen varias alternativas, que van a depender de la competencia entre la fuerza elástica (que tiende a hacer oscilar al sistema), y la fuerza viscosa (que tiende a frenarlo):

- El sistema, apartado de la posición de equilibrio[4], tiende a volver a ésta oscilando alrededor de ella, pero con una amplitud cada vez menor.
- El sistema no llega a oscilar y tiende, simplemente, a volver a la posición de equilibrio.

---

[2] A velocidades altas, el fluido puede comportarse como *turbulento* y manifestarse otros efectos (por ejemplo, turbulencias) que también dificultan el movimiento. Que un fluido se comporte como laminar o turbulento, se caracteriza mediante un número adimensional, conocido como *número de Reynolds*.

[3] La *viscosidad* es la propiedad de los fluidos por la cual se oponen a las deformaciones tangenciales. Podría considerarse como el *rozamiento* entre capas adyacentes de fluido.

[4] Cuando hablamos de “posición de equilibrio”, nos referimos a la posición de equilibrio del sistema en ausencia de fuerza viscosa. Es decir, la posición de equilibrio cuando el sistema, además, está en reposo (y, por lo tanto, la fuerza viscosa también es nula).

Vamos, entonces, a plantear la dinámica del sistema:

- La masa m está sometida a las siguientes fuerzas (planteamos para una situación cualquiera, como la que se ve en la figura):

$\vec{F}_e = -kx\hat{x}$

$\vec{F}_v = -\sigma\,\dot{x}\hat{x}$

Notar que, tal como pusimos el origen de coordenadas, x representa directamente la elongación del resorte.

Planteamos el segundo principio y, como siempre, reordenamos la EM:

$x) - kx - \sigma\,\dot{x} = m\ddot{x}$

$$\boxed{\Rightarrow \ddot{x} + \frac{\sigma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

Resulta una ecuación de Euler, esta vez, homogénea. Llamamos:

$\omega_o^2 = \dfrac{k}{m} \qquad 2b = \dfrac{\sigma}{m}$

con lo que, la ecuación, finalmente, resulta:

$$\boxed{\Rightarrow \ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_o^2 x = 0}$$

Como la ecuación es homogénea, no hay solución particular. Planteamos, como antes, que la solución (solución de una homogénea) es del tipo:

$x(t) \approx e^{\lambda t}$

Nuevamente, tenemos que determinar los parámetros λ. Introducimos la solución propuesta en la ecuación y encontramos la ecuación característica:

$(\lambda^2 + 2b\lambda + \omega_o^2)e^{\lambda t} = 0 \qquad \Rightarrow (\lambda^2 + 2b\lambda + \omega_o^2) = 0$ para que la ecuación esté igualada a cero para todo tiempo.

La ecuación característica es una cuadrática, cuya solución nos da dos $\lambda's$ posibles:

$\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_o^2}$

Observemos que hay tres casos posibles, dependiendo de la relación entre los valores de b y ω_o:

a) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in R$ si $b > \omega_o$ $\quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = -b \pm \alpha$, donde $\alpha = \sqrt{b^2 - \omega_o^2}$

b) $\lambda_1 = \lambda_2 \in R$ si $b = \omega_o$ $\quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = -b$

c) λ_1 *y* λ_2 *complejos conjugados* si $b < \omega_o$ $\quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = -b \pm i\omega$, donde $\omega = \sqrt{\omega_o^2 - b^2}$

Vamos a ver a qué solución corresponde cada caso.

a) $\dfrac{\sigma}{2m} > \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

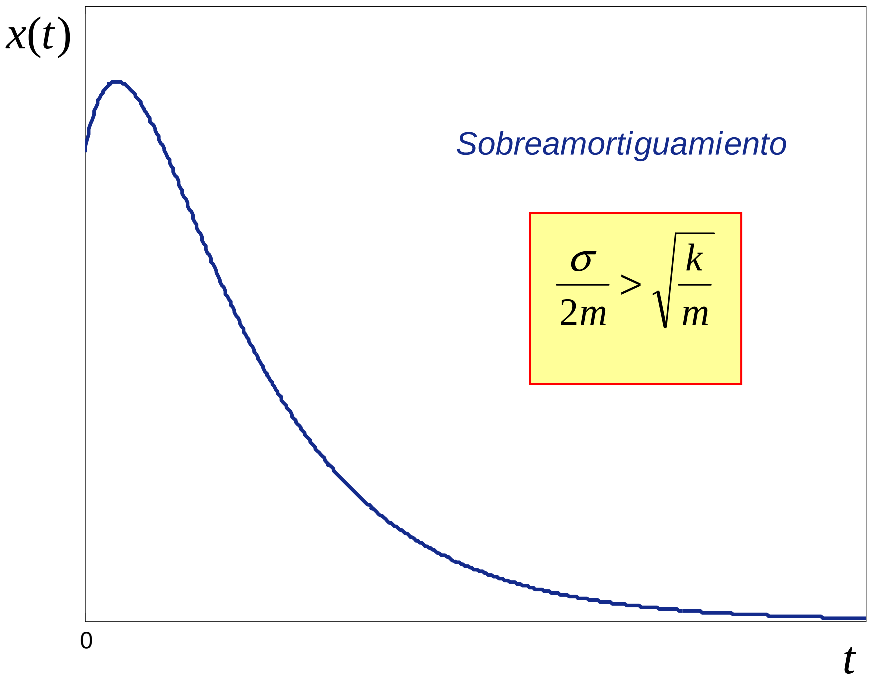
Este caso corresponde a que la fuerza viscosa sea "preponderante" frente a la elástica.

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-bt}\left[C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{-\alpha t}\right]$$

Manipulando como antes, se llega a cualquiera de estas formas de expresar la solución:

$$\boxed{x(t) = \begin{cases} 1) e^{-bt}\left[C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{-\alpha t}\right] \\ 2) e^{-bt} Ach(\alpha t + \varphi) \\ 3) e^{-bt} Bsh(\alpha t + \varphi') \\ 4) e^{-bt}\left[A_1 ch\alpha t + B_1 sh\alpha t\right] \end{cases}}$$

Hay dos constantes de integración a determinar mediante las condiciones iniciales.



b) $\dfrac{\sigma}{2m} = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

En este caso hay una única raíz doble ($\lambda_{1,2} = -b$). Sin embargo, ésta es una ecuación de segundo grado, por lo que, sabemos, debe haber dos constantes de integración. Luego, la solución no puede escribirse solamente como $x(t) = Ae^{\lambda t}$. Por esa razón, la solución en este caso es ligeramente diferente de las anteriores. Sin perder generalidad, podemos plantear una solución:

$$x(t) = e^{-\lambda t} f(t)$$

donde tenemos que averiguar quién es $f(t)$. Para ello, introducimos la solución propuesta en la ecuación:

$$\underbrace{e^{-bt}[b^2 f(t) - 2b\dot{f}(t) + \ddot{f}(t)]}_{\ddot{x}} + \underbrace{2be^{-bt}[-bf(t) + \dot{f}(t)]}_{2b\dot{x}} + \underbrace{\omega_o^2 e^{-bt} f(t)}_{\omega_o^2 x} = 0$$

Reordenando:

$$e^{-bt}\left\{b^2 f(t) - 2b\dot{f}(t) + \ddot{f}(t) - 2b^2 f(t) + 2bf(t)\right\} = 0$$

$$e^{-bt}\left\{\ddot{f}(t) + \underbrace{\left(\omega_o^2 - b^2\right)}_{=0}\right\} = 0 \Rightarrow \ddot{f}(t) = 0$$

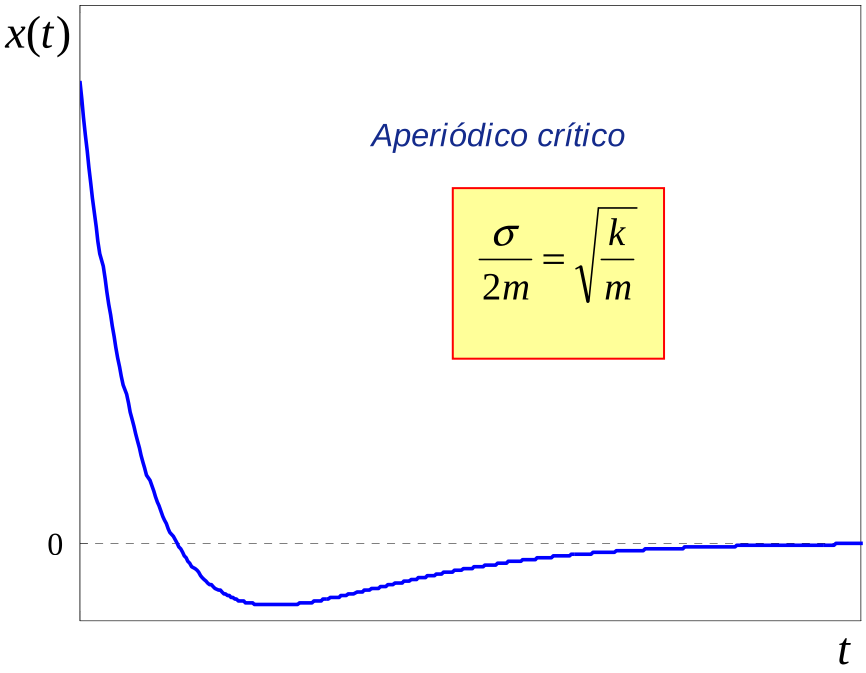
donde $\left(\omega_o^2 - b^2\right) = 0$ pues es justamente la situación planteada. La ecuación resultante para $f(t)$ tiene como solución una recta:

$$f(t) = A + Bt$$

con lo que, la solución que buscábamos es:

$$\boxed{x(t) = e^{-bt}(A + Bt)}$$

- Nuevamente, el movimiento resultante no es un movimiento periódico.
- Este tipo de movimiento se llama *movimiento aperiódico crítico*.
- La amplitud decrece rápidamente a cero, si bien puede, dependiendo de las condiciones iniciales, completar alguna oscilación (como se ve en la figura). Notar que el factor e^{-bt}, que aparece debido a la presencia de la fuerza viscosa, es responsable del decrecimiento de la amplitud.



c) $\frac{\sigma}{2m} < \sqrt{\frac{k}{m}}$

En este caso, la fuerza elástica "lidera" el movimiento.

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-bt}\left[C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right]$$

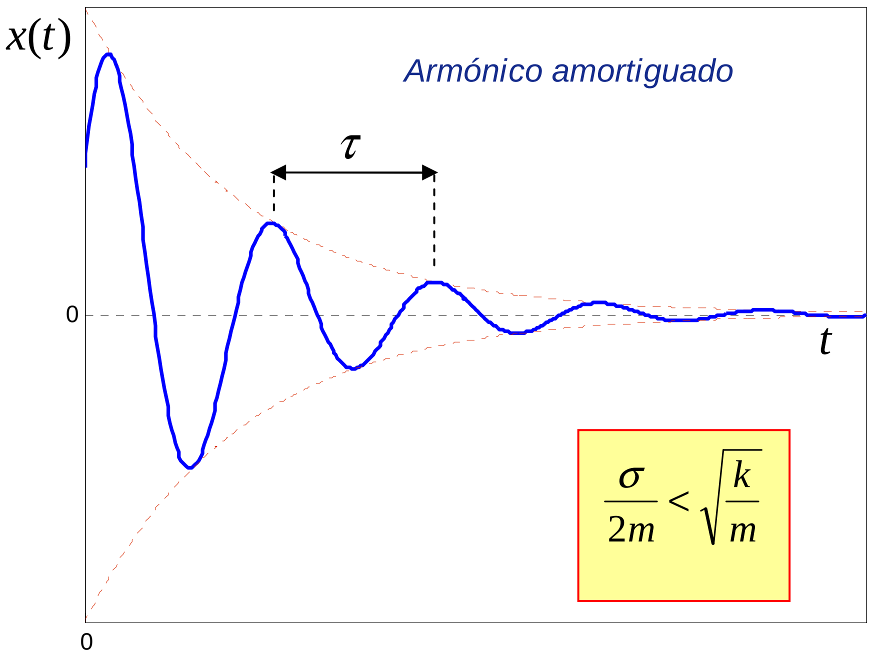
La parte de la solución que está dentro del corchete es idéntica a la del oscilador armónico simple. Entonces:

$$\boxed{x(t) = \begin{cases} 1) e^{-bt}\left[C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right] \\ 2) e^{-bt} A\cos(\omega t + \varphi) \\ 3) e^{-bt} B sen(\omega t + \varphi') \\ 4) e^{-bt}\left[A_1 \cos\omega t + B_1 sen\,\omega t\right] \end{cases}}$$

- El movimiento resultante no es, estrictamente hablando, un movimiento periódico en el sentido de expresar con esto que el móvil pasa por la misma posición a intervalos regulares de tiempo. Sí se trata de una oscilación cuya amplitud se va amortiguando por efecto de la fuerza viscosa (notar el factor modulante e^{-bt}).
- Si bien no es un movimiento periódico, el tiempo transcurrido entre dos crestas sucesivas es constante. En ese sentido, se puede definir un "seudo período" τ igual a ese intervalo de tiempo:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_o^2 - b^2}} = \frac{2\pi}{\omega_o}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{b^2}{\omega_o^2}}} = \tau_o \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\sigma}{2m\omega_o}\right)^2}} \Rightarrow \tau > \tau_o$$

donde τ_o es el período propio del oscilador armónico simple (es decir, en vacío). Observar que la fuerza viscosa no solo varía la amplitud del movimiento, sino también el período propio del oscilador. $\tau > \tau_o$, lo cual resulta intuitivo si se considera que la fuerza viscosa se opone al movimiento, es decir, lo "retarda".



- Algunas observaciones generales:

➢ El régimen crítico vuelve a la situación de equilibrio más rápidamente que el sobreamortiguado. Esto es bastante intuitivo, ya que, en el crítico, la magnitud de la fuerza viscosa es comparable a la elástica y, por lo tanto, opone menos resistencia al movimiento.

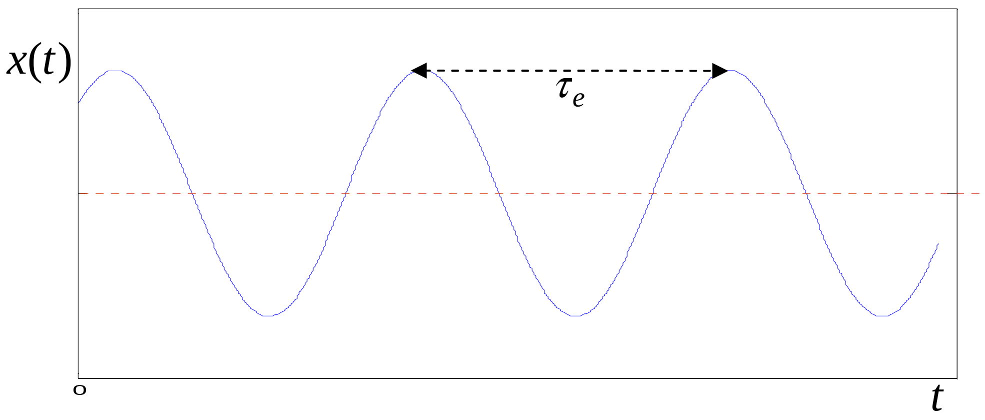
➢ En el movimiento sobreamortiguado, cuanto mayor es la viscosidad del medio (y, por lo tanto, b), más lentamente decae la amplitud del movimiento. Aunque esto no parece intuitivo (debido al factor e^{-bt}), otra vez, un b mayor implica mayor oposición al movimiento. Es decir que, el retorno a la posición de equilibrio es más lento. Matemáticamente, esto se pone en evidencia ya que α depende de b.

➢ Según hemos visto, el tipo de movimiento depende de la relación entre estas dos cantidades: $\frac{\sigma}{2m}$ y $\sqrt{\frac{k}{m}}$. Anteriormente, dijimos que, en cierta manera, cada una de estas cantidades está caracterizando a las dos fuerzas intervinientes ($\vec{F}_v$ y $\vec{F}_e$). La pregunta es qué significan y cómo caracterizan a estas fuerzas.

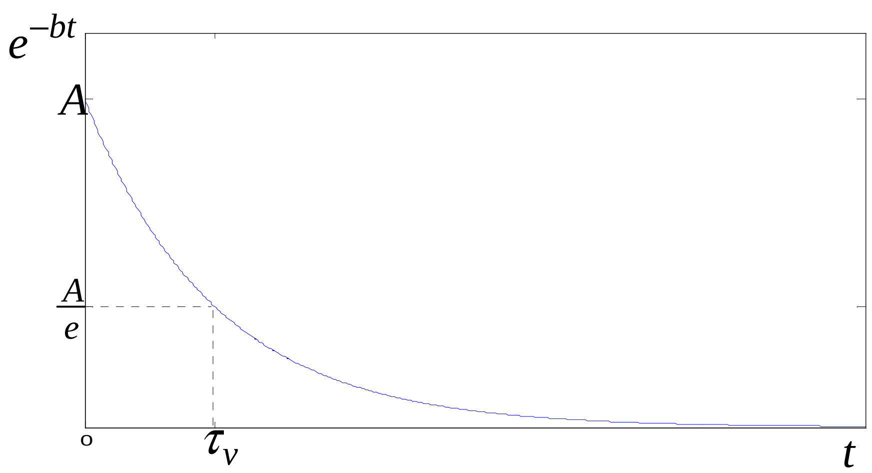
Vamos a dar una interpretación física. Para ello, notemos que la dimensión de ambas cantidades es $\lfloor t^{-1} \rfloor$. Definamos, entonces, dos tiempos:

$$\tau_v = \frac{2m}{\sigma} \quad \text{y} \quad \tau_e = \sqrt{\frac{m}{k}}$$

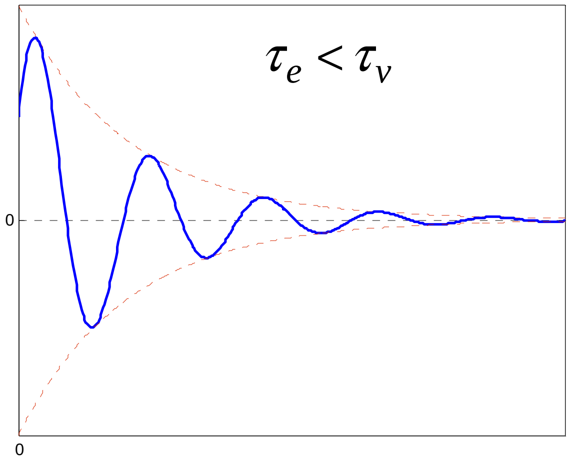
- τ_e es, a menos de un factor 2π, el período de un movimiento armónico simple, es decir, el tipo de movimiento que hubiéramos obtenido si el sistema hubiese estado en vacío (es decir, con $\sigma = 0$):



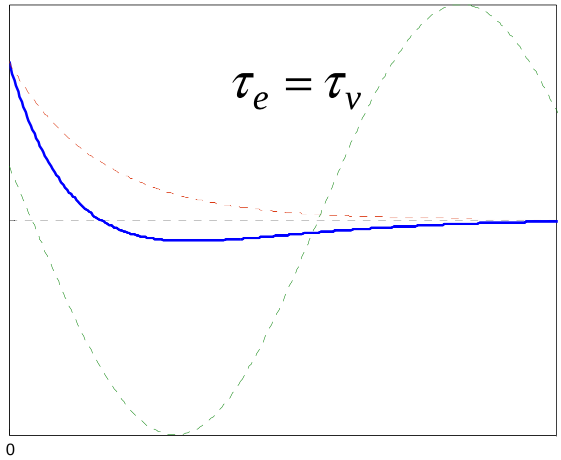
- τ_v es el tiempo en el que la amplitud del movimiento cae a $1/e$ de su valor inicial, por efecto de la fuerza viscosa (por el factor e^{-bt}).



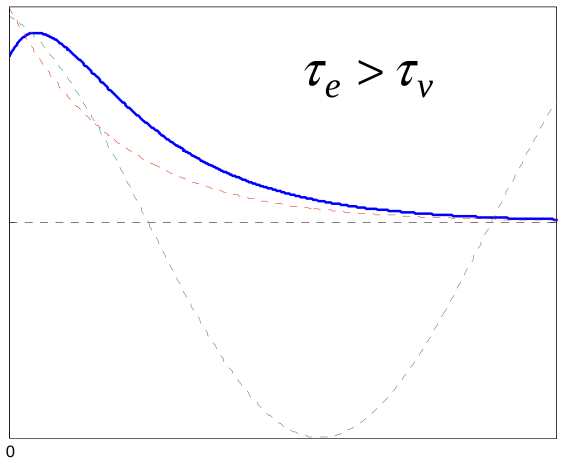
- Entonces, puede decirse que el tipo de respuesta del sistema depende de la relación entre el tiempo característico en que la amplitud decae y el de una oscilación no amortiguada. Cuanto menor sea τ_v, menor será la cantidad de oscilaciones completas que el sistema podrá efectuar antes de que la amplitud tienda a cero. Cuando $\tau_e > \tau_v$, el sistema no puede efectuar ninguna oscilación pues la amplitud decrece más abruptamente. Si $\tau_e = \tau_v$, la situación es crítica y el sistema tiende a comenzar a oscilar, pero, como ambos tiempos son comparables, la fuerza viscosa lo impide.



Varias oscilaciones antes de que la amplitud decrezca mucho.



Puede tender a oscilar (---.), pero el efecto de la fuerza viscosa (---) termina impidiendo la oscilación.



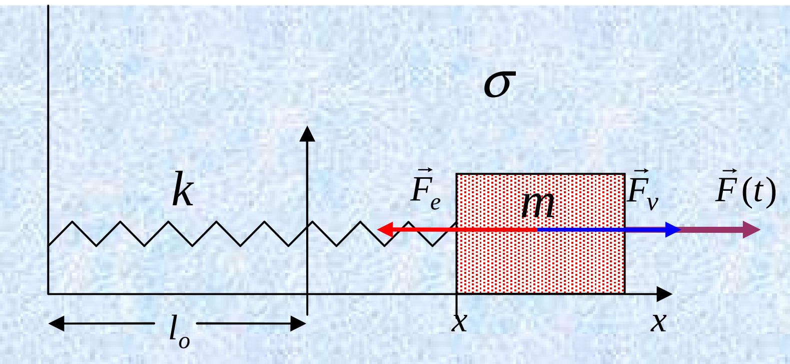
Ninguna oscilación (---.): la amplitud decrece por efecto de la fuerza viscosa (---).

Oscilador forzado

Supongamos un oscilador al que se lo somete a una fuerza externa $\vec{F}(t)$ que varía armónicamente con el tiempo, con una frecuencia ω. Esta frecuencia puede ser diferente o igual a la frecuencia propia del oscilador, ω_o:

$$\vec{F}(t) = F_o \cos(\omega\, t)\hat{x}$$

con $F_o = cte$, y hemos llamado x a la coordenada de movimiento. A esta fuerza vamos a llamarla "fuerza excitadora" o "perturbación" del sistema.



La EM será, considerando que el sistema está sumergido en un medio viscoso:

$$-kx - \sigma\,\dot{x} + F(t) = m\ddot{x}$$

O sea, una vez ordenada la ecuación:

$$\boxed{\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_o^2 x = f\cos(\omega\, t)}$$

donde, como antes, hemos redefinido las constantes:

$$2b = \frac{\sigma}{m} \qquad \omega_o^2 = \frac{k}{m} \qquad f = \frac{F_o}{m}$$

Llamaremos "respuesta del sistema" a la solución de esta ecuación, es decir, al desplazamiento de nuestro sistema.

Nos vamos a concentrar solo en la solución particular de la ecuación de movimiento por el siguiente motivo. La solución de la ecuación homogénea corresponde a la de un oscilador en un medio viscoso, cuyas soluciones encontramos en la sección anterior. Como hemos visto, los tres tipos de movimiento encontrados compartían una característica común, y es que su amplitud se va amortiguando con el tiempo y tiende asintóticamente a cero. Esto significa que, después de un cierto tiempo, el oscilador va a comportarse como si la única solución de la ecuación de movimiento fuera la solución particular $x_P(t)$ (es decir, el movimiento va a estar regido por la fuerza excitadora). Esto hace que, en el movimiento, puedan distinguirse dos etapas:

- Un *régimen transitorio*, en el que coexisten ambas soluciones (x_H y x_P), es decir la respuesta se debe a los efectos conjuntos de $\vec{F}_e, \vec{F}_v$ y $\vec{F}(t)$.
- Un *régimen permanente o estacionario*, cuando el régimen transitorio tiende a cero, en el que el sistema oscila gobernado por la fuerza excitadora ($x_H(t) \to 0$ y subsiste solo $x_P(t)$)

Encontremos, entonces, la solución particular, es decir, la respuesta del sistema en el régimen estacionario. Como la inhomogeneidad es una función armónica, probamos como solución (a partir de aquí, por una cuestión de claridad, llamaremos $x(t)$ a $x_P(t)$):

$$x(t) = A\cos\omega t + B sen\omega t$$

Para encontrar las constantes *A* y *B*, introducimos $x(t)$ en la ecuación de movimiento, y reordenamos los términos:

$$\dot{x}(t) = -A\omega sen\omega t + B\omega\cos\omega t$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2 sen\omega t$$

$$\left[\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)A + 2b\omega B\right]\cos\omega t + \left[\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)B - 2b\omega A\right]sen\omega t = f\cos\omega t$$

Notar que, en la solución propuesta, la frecuencia de las funciones armónicas *es la misma* que la de la fuerza excitadora. Esto se debe a que la ecuación de movimiento debe cumplirse *para todo tiempo*, y solo la combinación lineal de funciones armónicas de una misma frecuencia puede coincidir para todo tiempo con otra función armónica de esa misma frecuencia.

Como la ecuación debe cumplirse para todo tiempo, igualamos los coeficientes de los dos términos que acompañan a $\cos\omega t$, e igualamos a cero al que acompaña a $sen\omega t$. Resulta:

$$\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)A + 2b\omega B = f$$

$$\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)B - 2b\omega A = 0$$

cuya solución es:

$$A = \frac{(\omega_o^2 - \omega^2)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (2b\omega)^2}\, f$$

$$B = \frac{2b\omega}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (2b\omega)^2}\, f$$

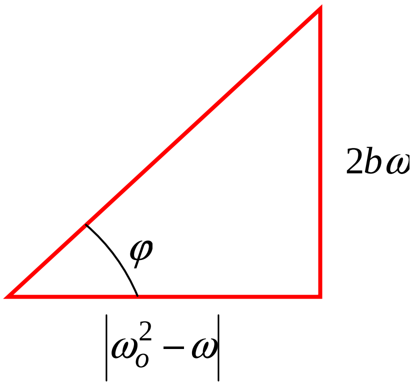
Luego, la solución particular será, ordenado los términos:

$$x(t) = \frac{f}{\left[(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (2b\omega)^2\right]^{1/2}}\left[\frac{(\omega_o^2 - \omega^2)}{\left[(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (2b\omega)^2\right]^{1/2}}\cos\omega t + \frac{2b\omega}{\left[(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (2b\omega)^2\right]^{1/2}} sen\omega t\right]$$

donde hemos factorizado el denominador para que la solución resulte más sencilla de interpretar, reescribiéndola de la forma:

$x(t) = C\cos(\omega t + \varphi)$

Para ello notemos, antes de hacer muchas cuentas, que podemos definir un ángulo φ tal que:



$$sen\varphi = \frac{2b\omega}{\left[(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (2b\omega)^2\right]^{1/2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{(\omega_o^2 - \omega^2)}{\left[(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (2b\omega)^2\right]^{1/2}}$$

Con lo que, la solución puede reescribirse:

$$x(t) = \frac{f}{\left[(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (2b\omega)^2\right]^{1/2}}\left[\cos\varphi\cos\omega t + sen\varphi sen\omega t\right]$$

$$\boxed{\Rightarrow x(t) = \frac{f}{\left[(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (2b\omega)^2\right]^{1/2}}\cos(\omega t - \varphi)}$$

con $\varphi = arctg\dfrac{2b\omega}{\omega_o^2 - \omega^2}$

Esta diferencia de fase φ (diferencia de fase con la fuerza excitadora), nos dice en qué ángulo el desplazamiento (la *respuesta*) alcanza su máximo antes o después que la perturbación.

Encontremos también la velocidad:

$$\dot{x}(t) = -\frac{\omega f}{\left[(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (2b\omega)^2\right]^{1/2}}sen(\omega t - \varphi)$$

Escribamos también la velocidad como un coseno:

$$\dot{x}(t) = \frac{\omega f}{\left[(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (2b\omega)^2\right]^{1/2}}\cos(\omega t + \varphi_v)$$

con $\varphi_v = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$

Veamos la respuesta en los casos límite:

- ***Respuesta a baja frecuencia:*** $\omega << \omega_o$ **:**

Supongamos que la frecuencia de la fuerza excitadora es baja respecto de la frecuencia propia del oscilador. En este caso, podemos hacer el límite para $\frac{\omega}{\omega_o} \to 0$:

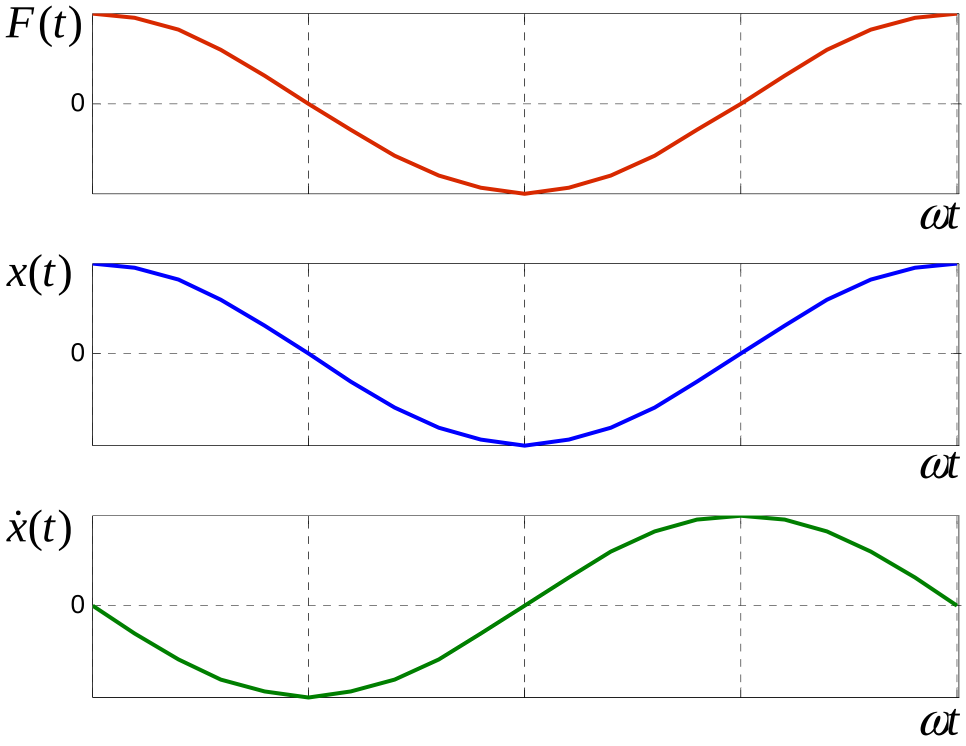
$$tg\varphi \to \frac{2b\omega}{\omega_o^2} \to 0^+ \Rightarrow \varphi \to 0 \ y \ \varphi_v \to \frac{\pi}{2}$$

donde 0^+ significa que tiende a cero desde los valores positivos. Vemos que la respuesta está en fase con la fuerza excitadora, es decir, alcanza su máximo (mínimo) cuando la fuerza excitadora es máxima (mínima). Puede decirse que la respuesta puede seguir a la fuerza excitadora, lo que resulta intuitivo, ya que la frecuencia de la perturbación es baja. Notar que la velocidad está desfasada respecto de la aceleración que le provee la perturbación, con lo que a veces resultan paralelas (lo que aumenta la velocidad) y otras, antiparalelas (lo que disminuye la velocidad). Se dice, en este caso, que la velocidad *adelanta* respecto de la fuerza.

La amplitud $A = \frac{f}{\left[(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (2b\omega)^2\right]^{1/2}}$ resulta, en ese límite:

$$A \to \frac{f}{\omega_o^2} = \frac{F_o}{k}$$

Es interesante notar que, en este caso en que la frecuencia de la perturbación es baja y la respuesta puede seguir a la perturbación, lo que limita la amplitud es la magnitud de la fuerza elástica, mientras que la magnitud de la fuerza excitadora tiende a aumentarla. Puede decirse que la magnitud de la fuerza elástica *condiciona* la respuesta.



- ***Respuesta a alta frecuencia:*** $\omega >> \omega_o$**:**

Si la frecuencia de la fuerza excitadora es alta respecto de la frecuencia propia del oscilador, hacemos el límite $\frac{\omega_o}{\omega} \to 0$:

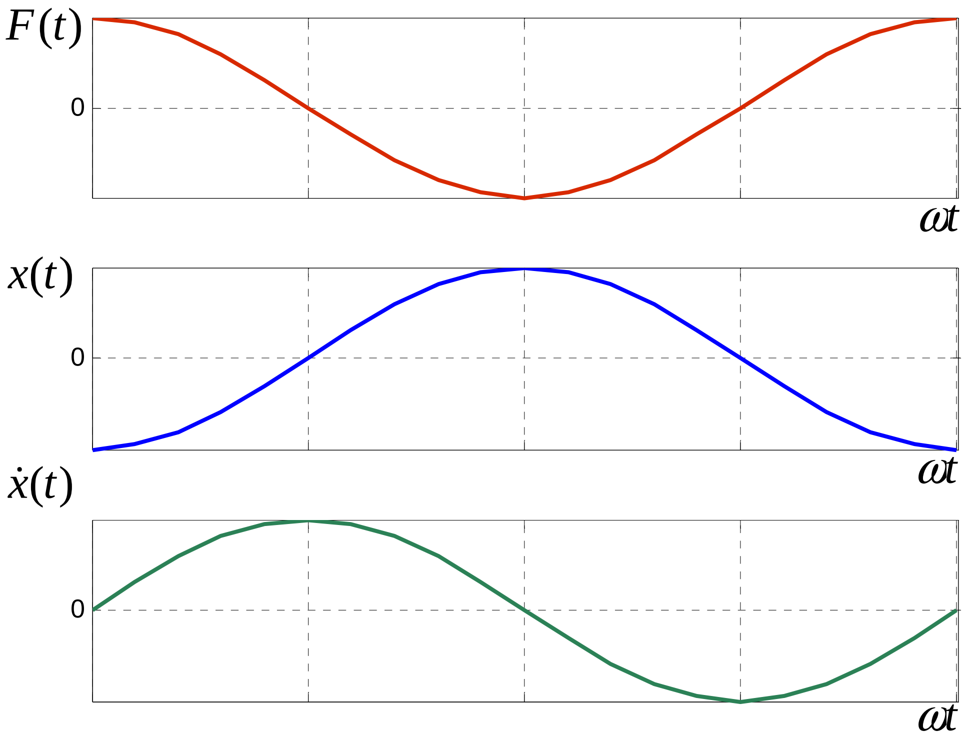
$$tg\varphi \to -\frac{2b}{\omega} \to 0^- \Rightarrow \varphi \to \pi \; y \; \varphi_v \to -\frac{\pi}{2}$$

donde 0^- indica que se tiende a 0 con valores negativos. Se observa que la respuesta está desfasada en π respecto de la fuerza: la respuesta no puede seguir a la fuerza y termina totalmente desfasada respecto de ésta. Por su parte, la velocidad, nuevamente está desfasada; hay intervalos de tiempo en los que resulta paralela, y otros antiparalela, a la fuerza, pero en este caso, *retrasa* respecto de la fuerza.

La amplitud:

$$A \to \frac{f}{\omega^2} = \frac{F_o}{m\omega^2}$$

Se ve que la respuesta disminuye como ω^2 (cuanto mayor es la frecuencia de la perturbación, menor es la respuesta), y que la masa del sistema (es decir, su inercia) condiciona la respuesta. Esto último es fácil de entender teniendo en cuenta que la inercia es la propiedad de los cuerpos que se opone a los cambios en el estado de movimiento de éstos.



- ***Respuesta máxima: condición de resonancia.***

Una pregunta importante en muchos casos prácticos es bajo qué condiciones se obtiene una respuesta máxima. Como la amplitud es función de ω, vamos a encontrar con qué frecuencia debemos excitar al sistema para obtener una amplitud máxima.

$$A(\omega) = \frac{f}{\left[(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (2b\omega)^2\right]^{1/2}}$$

Para ello, debemos derivar la expresión de la amplitud A respecto de ω e igualar la expresión resultante a cero. Sin embargo, notemos que, para que A sea máxima, basta que el radicando del denominador sea mínimo. Entonces, esa expresión es la que vamos a minimizar respecto de ω.

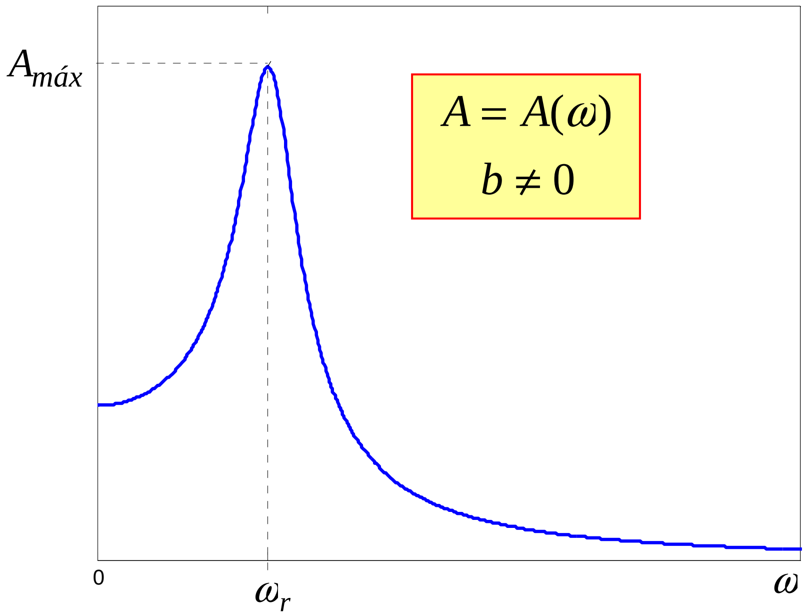
$$\frac{d}{d\omega}(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (2b\omega)^2 = 0$$

$$-4\omega(\omega_o^2 - \omega^2) + 8b^2\omega = 0$$

$$4\omega\left[-(\omega_o^2 - \omega^2) + 2b^2\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_r = \left(\omega_o^2 - 2b^2\right)^{1/2}}$$

La solución $\omega = 0$ se descarta porque no corresponde a una fuerza armónica. La amplitud máxima y la fase de la respuesta correspondiente resultan[5]:

$$A_{máx} = A(\omega_r) = \frac{f}{2b\left(\omega_o^2 - b^2\right)^{1/2}} \qquad tg\varphi_r = \frac{\omega_r}{b}$$

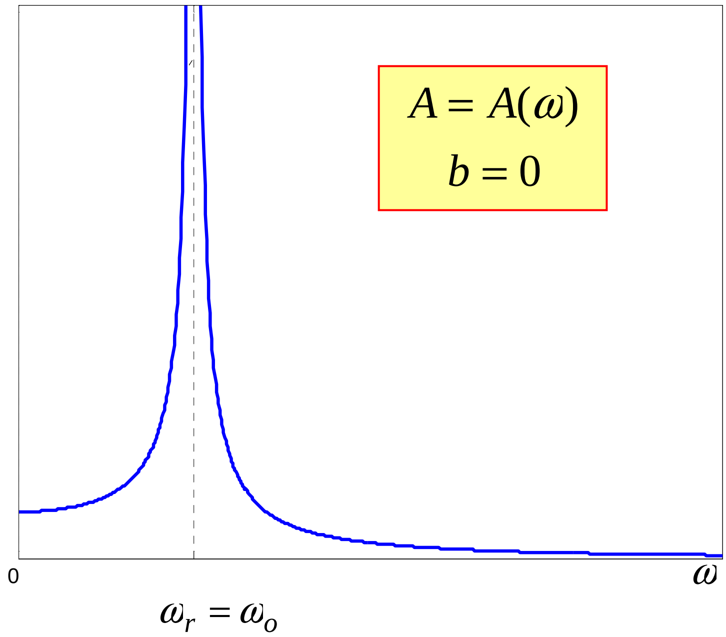


Notar que, cuanto menor sea el efecto disipativo (dado por el factor *b*), mayor será la amplitud máxima alcanzada. En particular, un caso que reviste mucha importancia es cuando el efecto disipativo prácticamente puede despreciarse (por ejemplo, en aire). En ese caso, si $b \to 0$, la amplitud máxima $A_{máx} \to \infty$ (¡!)[6]. La frecuencia que produce esta respuesta máxima es $\omega_r = \omega_o$, es decir, cuando la frecuencia de la perturbación coincide con la frecuencia propia del oscilador.

En este caso, la diferencia de fase entre la respuesta y la fuerza es $\varphi_r = \frac{\pi}{2}$, es decir, la respuesta está adelantada respecto de la fuerza. Nótese que la velocidad sí está en fase con la fuerza (es decir, $\varphi_{vr} = 0$). Este hecho es la razón física por la cual, en este caso, podemos obtener una respuesta máxima. Las desviaciones mayores se van a obtener cuando la velocidad está en fase con $\vec{F}(t)$. De esta manera, el sistema resulta "empujado" en el lugar y momento precisos. Vale decir, si la velocidad y la aceleración (provista por $\vec{F}(t)$) siempre

[5] En realidad, para demostrar que se trata de un máximo habría que volver a derivar y verificar que el valor de esta segunda derivada sea negativa para ω_r. Sin embargo, por simple inspección de la función, se ve que se trata de un máximo.
[6] Debe entenderse que, en física, hablar de "infinito" significa "muy grande". Si bien los cálculos nos arrojan ese resultado, esto se aplica al sistema "ideal". Por ejemplo, no estamos teniendo en cuenta que el resorte es material y tiene su propia inercia. En general, en los sistemas mecánicos existen condiciones materiales que limitan la respuesta, aunque ésta llegue realmente a alcanzar valores indudablemente grandes.

tienen el mismo sentido, vamos a obtener un desplazamiento máximo. En el caso en que el efecto disipativo no sea despreciable, φ_{vr} ya no es cero (si bien es tanto más cercana a cero cuanto menor sea *b*), por lo que en ciertos intervalos de tiempo, velocidad y aceleración resultan antiparalelas y, por lo tanto, si bien obtenemos una amplitud máxima compatible con el efecto disipativo presente, esta amplitud ya no llega a ser infinita.



Este fenómeno se denomina *resonancia* y, gracias a él, fuerzas excitadoras relativamente modestas pueden provocar oscilaciones de gran amplitud que, incluso, pueden llegar a romper el sistema oscilante. En nuestra vida cotidiana tenemos ejemplos de *resonancia mecánica*:

- Una soprano rompe una copa al emitir una nota cuya frecuencia coincide con la frecuencia propia del cristal. Las vibraciones colectivas del material se hacen notables y el material se rompe.
- Un objeto en la casa vibra (a veces, emite un sonido de una determinada frecuencia) al ser excitado por una vibración en la calle (por ejemplo, el paso de un vehículo pesado por una calle adoquinada).
- Un diapasón vibra al ser excitado por una nota de determinada frecuencia emitida por algún instrumento.
- En los puentes colgantes, no se permite el paso de tropas de soldados marcando el paso, ya que si la frecuencia de los pasos coincide con la del puente, éste puede entrar en resonancia y derrumbarse.

Cabe aclarar que el fenómeno de resonancia no se restringe solo a la resonancia mecánica. Podría decirse que todo sistema en el que haya una frecuencia característica involucrada, puede entrar en resonancia. Por ejemplo,

- Al sintonizar una estación de radio, se está haciendo coincidir la frecuencia propia de un circuito eléctrico o electrónico con la frecuencia con la que emite la estación de radio. En ese caso, la transferencia de energía es óptima. Esto es un fenómeno de *resonancia eléctrica o elctrónica.*
- Los átomos solo absorben o emiten energía radiante de frecuencias determinadas. Es decir, solo se puede excitar un átomo si se le entrega energía de aquellas frecuencias que le son propias. Este es un fenómeno de *resonancia atómica*.

----------------⏭ 🗲 ⏮----------------

Pequeñas oscilaciones

Al comenzar este capítulo vimos que un sistema sometido a una fuerza puede realizar un movimiento armónico, si se restringe el movimiento a un pequeño entorno alrededor de un punto de equilibrio estable. Ese tipo de movimiento se menciona diciendo que *el sistema está realizando pequeñas oscilaciones alrededor de dicho punto*. Vamos ahora, entonces, a encontrar la EM que corresponde a esta situación.

Supongamos que tenemos un sistema sometido a una fuerza $\vec{F}$, actuando en la dirección x, donde por "x" estamos entendiendo cualquier coordenada de movimiento (no necesariamente la coordenada cartesiana):

$$\vec{F} = F(x)\hat{x}$$

La ecuación de movimiento resulta:

$$m\ddot{x} = F(x) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} - \frac{F(x)}{m} = 0$$

Sea x_E una posición de equilibrio del sistema. Supongamos que apartamos un poco al sistema de esa posición. La fuerza entonces, puede escribirse como un desarrollo en serie alrededor de esa posición. Si el apartamiento es pequeño, podemos quedarnos a primer orden:

$$F(x \approx x_E) \cong \underbrace{F(x = x_E)}_{=0} + \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_E} (x - x_E) = \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_E} (x - x_E)$$

Es decir que, cerca de la posición de equilibrio, podemos aproximar la fuerza por esta expresión a primer orden en x. Reemplazando esta expresión aproximada de la fuerza en la EM:

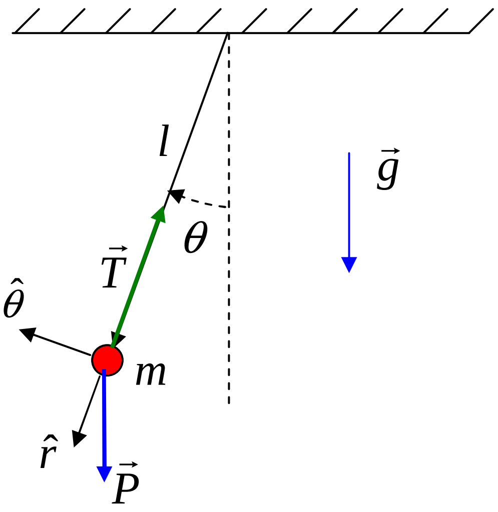
$$\ddot{x} - \frac{1}{m}\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_E} (x - x_E) = 0$$

$$\ddot{x} - \frac{1}{m}\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_E} x = \underbrace{\frac{1}{m}\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_E} x_E}_{cte \equiv C} = C \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\ddot{x} - \frac{1}{m}\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_E} x = C}$$

Ésta es la EM de un movimiento armónico si y solo si $\left.\frac{1}{m}\frac{dF}{dx}\right|_{x_E} < 0$. Pero, justamente, ésa es la condición para que x_E sea una posición de equilibrio estable. Entonces, la conclusión es *solo se pueden hacer pequeñas oscilaciones alrededor de una posición de equilibrio estable*. Notar que si x_E es una posición de equilibrio *inestable* y, por lo tanto, $\left.\frac{1}{m}\frac{dF}{dx}\right|_{x_E} > 0$, la EM no corresponde a un movimiento armónico, sino a uno muy distinto donde la coordenada de movimiento varía monótonamente. Por lo tanto, la aproximación que hicimos, donde se suponía que x se mantenía en un entorno de x_E, no es una buena aproximación.

La idea, entonces, de hacer pequeñas oscilaciones, es aprovechar el hecho de que nos estamos apartando poco de una posición de equilibrio estable, y linealizar la fuerza de tal manera que cumpla con al ley de Hooke.

- ***Ejemplo: Oscilaciones de un péndulo matemático o ideal***



Un péndulo matemático o ideal consta de una masa (llamada "lenteja") que puede considerarse puntual, suspendida de un hilo ideal, que puede oscilar alrededor de la posición de equilibrio. Para estudiar su movimiento, es conveniente el uso de coordenadas polares. Definimos el sentido de θ creciente como en la figura (de la vertical hacia el vector posición), de tal manera que los versores polares son como se muestran. Las fuerzas actuantes son el peso $\vec{P}$ y la tensión del hilo $\vec{T}$. Hay una sola coordenada de movimiento, que es θ, ya que el sistema tiene un único grado de libertad (hay condiciones de vínculo en r y en z).

Las ecuaciones dinámicas resultan:

$\hat{r})\ P\cos\theta - T = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$

$\hat{\theta})\ -Psen\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$

Con la condición de vínculo $r = l$, resulta:

$\hat{r})\ P\cos\theta - T = m(-l\dot{\theta}^2)$

$\hat{\theta})\ -Psen\theta = ml\ddot{\theta}$

La ecuación en $\hat{r}$ es la ecuación de vínculo (contiene a la fuerza de vínculo $\vec{T}$), mientras que la ecuación en $\hat{\theta}$ es la ecuación de movimiento (permite determinar cómo varía la coordenada de movimiento θ). Reordenando la EM:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} sen\theta = 0$$

Esta EM no corresponde a un movimiento armónico simple (es un movimiento oscilatorio no armónico). Sin embargo, si el péndulo se mueve alrededor de $\theta = 0$, con una amplitud de movimiento de unos pocos grados (alrededor de 5°/0.01rad), el movimiento será armónico, ya que la posición de equilibrio es estable. En ese caso, el péndulo estará realizando *pequeñas oscilaciones* alrededor de esa posición de equilibrio.

Si $\theta << 1 : \left\{ \begin{array}{l} sen(\theta \approx 0) = \theta - \frac{1}{3}\theta^3 + ... \cong \theta \\ \cos(\theta \approx 0) = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + ... \cong 1 \end{array} \right\}$ haciendo un desarrollo en serie alrededor de $\theta = 0$

y la ecuación de movimiento:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0}$$

que es una EM armónico. Notar que, dentro de esta aproximación, la fuerza en la dirección de $\hat{\theta}$ cumple con la ley de Hooke:

$$F_\theta \cong -mg\theta$$

La solución de la EM, según lo ya visto, puede escribirse, por ejemplo:

$$\theta(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

con $\omega^2 = \frac{g}{l}$

De la EM se ve:

- La posición de equilibrio es $\theta = 0$ (ya lo sabíamos de antemano...)
- El período del movimiento es $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (esto no lo sabíamos...)