Nota sobre la ecuación diferencial asociada a un oscilador armónico amortiguado

12 de septiembre de 2014

Consideremos la ecuación diferencial asociada a un oscilador armónico amortiguado:

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0. \tag{1}$$

Si $k = 0$ no hay término restitutivo y se pierde el carácter oscilatorio. Si $\gamma = 0$ no hay término disipativo y se pierde el fenómeno de amortiguación.

Veamos qué pasa cuando tenemos los dos términos, el restitutivo y el disipativo. Primero reescribimos la ecuación (1),

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}. \tag{2}$$

Luego proponemos la siguiente solución, que contempla un movimiento oscilatorio y al mismo tiempo una amortiguación:

$$x(t) = A\exp(-t/\tau)\cos(\omega t + \delta). \tag{3}$$

Ejercicio 1. Mostrar que esta función del tiempo es solución de (2) si,

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}, \quad \tau = \frac{2m}{\gamma}.$$

Notar que esto solo tiene sentido cuando

$$\omega_0 > \frac{\gamma}{2m} \quad \text{(caso subamortiguado)}.$$

Tenemos por lo tanto *la solución subamortiguada*

$$\boxed{x(t) = A\exp\left(-\frac{\gamma}{2m}t\right)\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma}{2m}}t + \delta\right), \quad \omega_0 > \frac{\gamma}{2m}.} \tag{4}$$

Notemos que en el caso de apagar la constante de amortiguación, $\gamma = 0$, se reeobtiene el movimiento oscilatorio armónico con frecuencia $\sqrt{k/m}$.

En el caso contrario, donde $\omega_0 < \frac{\gamma}{2m}$ (caso sobreamortiguado), la fuerza disipativa le "gana" a la restitutiva y podríamos pensar que la solución es similar al caso donde $k = 0$. Por lo tanto, proponemos la solución:

$$x(t) = Ae^{-\lambda t} \tag{5}$$

Ejercicio 2. Mostrar que esta función del tiempo es solución de (2) si,

$$\lambda = \frac{\gamma}{2m}\left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\gamma/2m}\right)^2}\right].$$

Por lo tanto hay dos soluciones, una para cada signo, y como la ecuación diferencial es lineal (x y sus derivadas no están elevadas a ninguna potencia) dos soluciones se pueden sumar. Entonces obtenemos *la solución sobreamortiguada*

$$\boxed{x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\left(A\ e^{\sqrt{(\frac{\gamma}{2m})^2-\omega_0^2}} + B\ e^{-\sqrt{(\frac{\gamma}{2m})^2-\omega_0^2}}\right), \quad \frac{\gamma}{2m} > \omega_0.} \tag{6}$$

Notemos que si apagamos la constante elástica, entonces $\omega_0 = 0$ y recuperamos la solución correspondiente a un movimiento puramente amortiguado: $x(t) = x_0 + A\exp(-\frac{\gamma}{m}t)$.

Qué pasa con el caso crítico $\omega_0 = \gamma/2m$? En este caso ambas soluciones, subamortiguada y sobreamortiguada, se vuelven la misma (esto se llama degeneración), o sea una solución del tipo $\exp(-\omega_0 t)$. Como el sistema es de segundo orden, debe tener siempre dos soluciones independientes. La que falta se obtiene viendo como tienden las soluciones subamortiguadas o sobreamortiguadas a la solución con $\epsilon = \omega_0^2 - (\gamma/2m)^2 = 0$:

$$x_{\text{deg.}}(t) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{x_{\text{subamortiguada}}(t) - x_{\text{subamortiguada}}(t)|_{\epsilon=0}}{\epsilon}. \tag{7}$$

Ejercicio 3. Mostrar que *la solución crítica* es dada por

$$\boxed{x(t) = (A + Bt)\, e^{-\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{\gamma}{2m}} \tag{8}$$