

Photogates: Cálculo de la velocidad de un móvil

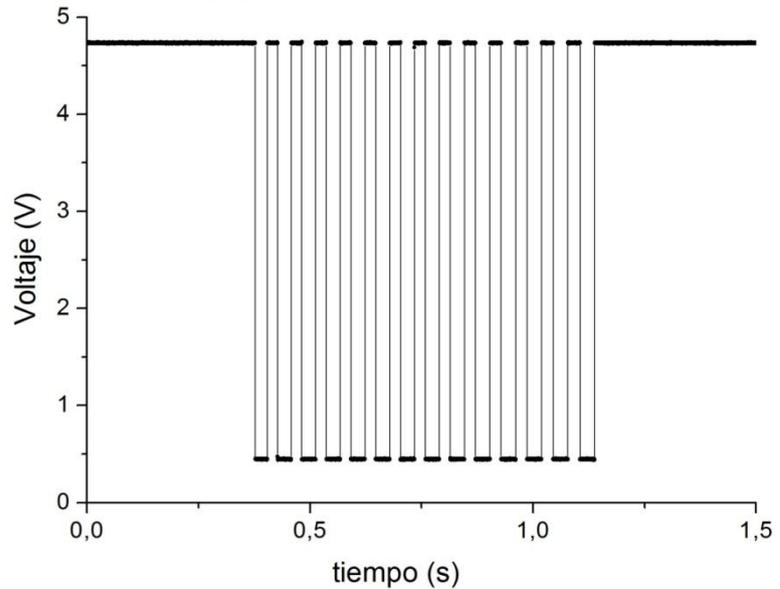
Supongamos que se tiene un móvil (con una cebra) que se desliza por una pista y que un photogate detecta su paso por un punto de la pista. Para este ejemplo consideramos que la cebra tiene las siguientes características:

$$L1 = (5.0 \pm 0.2) \text{ mm} \quad L2 = (3.9 \pm 0.2) \text{ mm}$$



Si graficamos los datos experimentales (Voltaje vs. tiempo) se observa:

	A(X)	B(Y)
Long Name		
Units		
Comments		
Sparklines		
1	0	4,734868
2	0,0002	4,732356
3	0,0004	4,73989
4	0,0006	4,732356
5	0,0008	4,727334
6	0,001	4,734868
7	0,0012	4,734868
8	0,0014	4,73989
9	0,0016	4,734868
10	0,0018	4,729845
11	0,002	4,734868
12	0,0022	4,732356
13	0,0024	4,737379
14	0,0026	4,732356
15	0,0028	4,729845
16	0,003	4,732356
17	0,0032	4,742401



1- ¿Cómo obtenemos la frecuencia de muestreo a partir de nuestros datos experimentales?

La señal se muestrea cada T segundos (T : período de muestreo) siendo $f_m = \frac{1}{T}$ la frecuencia de muestreo. Para determinar f_m tengo que hallar el valor de T . Esto se puede hacer de la siguiente manera: Si Col(A) es el tiempo y Col(B) es el voltaje medido, voy a **Set Colum Values** y calculo el tiempo transcurrido entre dos mediciones consecutivas: $Col(A)[i+1] - Col(A)[i]$

	A(X)	B(Y)	C(Y)
Long Name			
Units			
Comments			
Sparklines			
1	0	4,734868	0,0002
2	0,0002	4,732356	0,0002
3	0,0004	4,73989	0,0002
4	0,0006	4,732356	0,0002
5	0,0008	4,727334	0,0002
6	0,001	4,734868	0,0002
7	0,0012	4,734868	0,0002
8	0,0014	4,73989	0,0002
9	0,0016	4,734868	0,0002
10	0,0018	4,729845	0,0002
11	0,002	4,734868	0,0002
12	0,0022	4,732356	0,0002
13	0,0024	4,737379	0,0002
14	0,0026	4,732356	0,0002
15	0,0028	4,729845	0,0002
16	0,003	4,732356	0,0002
17	0,0032	4,742401	0,0002

Cuando hacemos esto vemos que las mediciones se registraron cada 0.0002 s (ver columna C). Entonces, la frecuencia de muestreo es $f_m = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.0002 \text{ s}} = 5000 \text{ Hz}$.

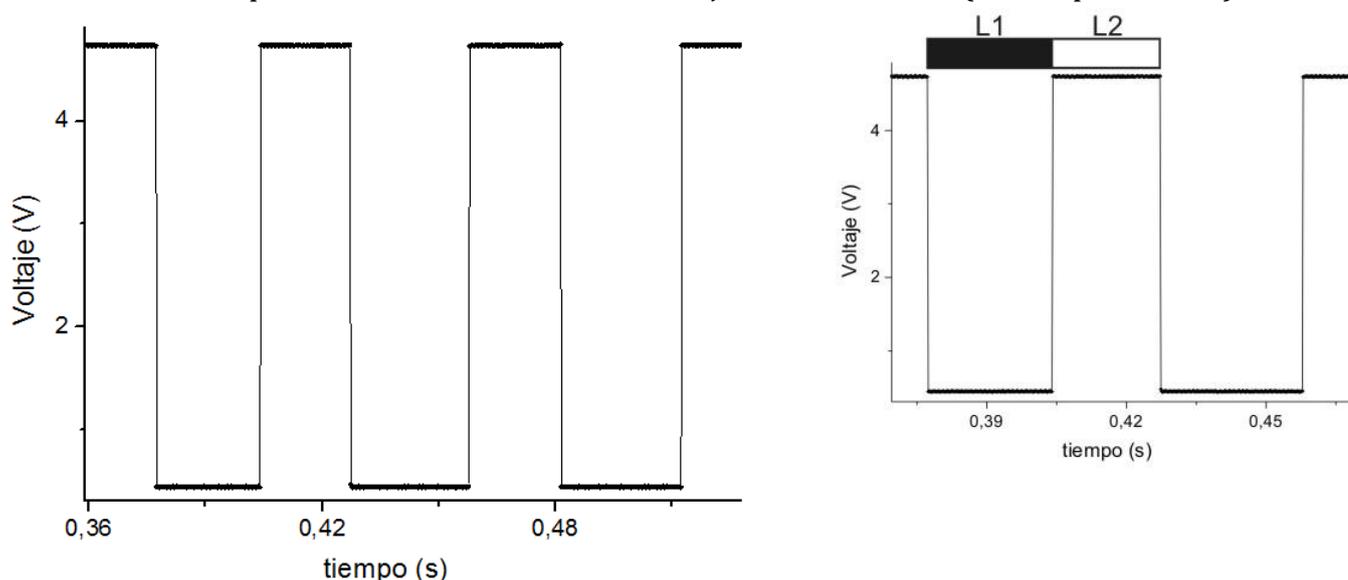
Y la incerteza en el tiempo es $\Delta t = 0.0002 \text{ s}$

2- Variación de la velocidad en el tiempo

Sabemos que la velocidad es $v = \frac{\partial x}{\partial t}$. ¿Cómo estimo v a partir de mis datos experimentales?

Experimentalmente es posible estimar la velocidad media de la siguiente manera $v = \frac{L}{T_m} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{intervalo de tiempo}}$, siendo T_m el intervalo de tiempo correspondiente al desplazamiento L del móvil.

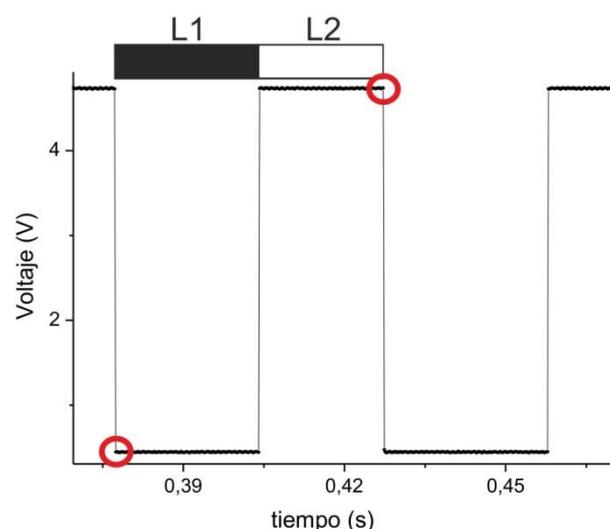
Me dicen que la cebra tiene las siguientes características: $L1 = (5.0 \pm 0.2) \text{ mm}$ $L2 = (3.9 \pm 0.2) \text{ mm}$
Si hacemos un zoom del gráfico de arriba vemos que (cuando la cebra pasa por el photogate) los intervalos de tiempo son más chicos cuando el voltaje es cercano a 5V (con respecto a 0 V).



Hay varias formas de estimar la velocidad. A continuación sólo voy a mostrar UNA de las posibilidades.

Opción I

Puedo considerar $L = L1 + L2$. En este caso T_m será el intervalo de tiempo definido por los círculos.



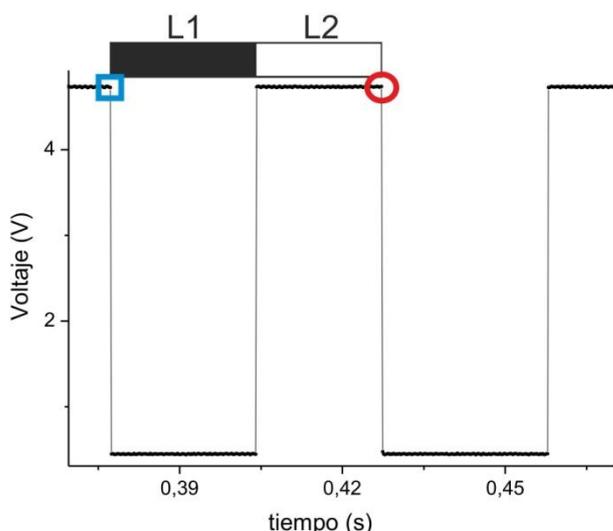
¿Cómo obtengo T_m ?

Una posibilidad es usar la opción *Extract Worksheet data* (ó *Worksheet Query*) del Origin. Dada una lista de datos, esta opción permite extraer (o filtrar) aquellos datos que cumplan con alguna condición específica.

- 1- Seleccionar la columna Voltaje.
- 2- Ir a Worksheet > Extract Worksheet data (ó Worksheet Query) > Seleccionar las columnas que se quieren usar y escribir la condición:

$$\text{Col(B)[i]} - \text{Col(B)[i+1]} > 4$$

Supongo que en la columna B están los datos de voltaje. ¿Por qué escribo esta condición? Ver Nota 1 al final del apunte.



Observación: En realidad, usando la condición de arriba se tiene el intervalo de tiempo dado por los datos marcados con el rectángulo y el círculo. Igual no hay problema porque esto está contemplado dentro de la incerteza experimental del tiempo.

Más información en: <http://www.originlab.com/doc/Origin-Help/Wks-Query>

Esta operación genera una nueva tabla de datos con la información filtrada (El Origin se queda con el elemento *i*).

Datos filtrados

	A(X)	B(Y)	C(Y)	D(Y)
name	tm	voltaje		Tm
units				
events				
1	0,3772	4,727334		0,05
2	0,4272	4,737379		0,0542
3	0,4814	4,744912		0,055
4	0,5364	4,729845		0,055
5	0,5914	4,734868		0,0558
6	0,6472	4,729845		0,0556
7	0,7028	4,737379		0,0556
8	0,7584	4,737379		0,0558
9	0,8142	4,729845		0,0566
10	0,8708	4,734868		0,0576
11	0,9284	4,734868		0,058
12	0,9864	4,727334		0,0586
13	1,045	4,734868		0,0602
14	1,1052	4,734868		--

De los datos filtrados solo me interesa la columna A que corresponde a los tiempos.

Calculo el tiempo transcurrido entre dos tiempos filtrados consecutivos: $T_m = t_m(i + 1) - t_m(i)$

Voy a **Set Colum Values > Col(A)[i+1] - Col(A)[i]**. De esta manera obtengo el intervalo de tiempo T_m .

	A(X)	B(Y)	C(Y)	D(Y)	E(Y)
name	tm	voltaje		Tm	velocidad
units					
events					
1	0,3772	4,727334		0,05	178
2	0,4272	4,737379		0,0542	164,20664207
3	0,4814	4,744912		0,055	161,81818182
4	0,5364	4,729845		0,055	161,81818182
5	0,5914	4,734868		0,0558	159,49820789
6	0,6472	4,729845		0,0556	160,07194245
7	0,7028	4,737379		0,0556	160,07194245
8	0,7584	4,737379		0,0558	159,49820789
9	0,8142	4,729845		0,0566	157,24381625
10	0,8708	4,734868		0,0576	154,51388889
11	0,9284	4,734868		0,058	153,44827586
12	0,9864	4,727334		0,0586	151,87713311
13	1,045	4,734868		0,0602	147,84053156
14	1,1052	4,734868		--	--

Para calcular la velocidad:

$$v = \frac{L}{T_m}, \text{ entonces } v_i = \frac{L}{t_m(i+1) - t_m(i)}$$

En este caso $L = (8.9 \pm 0.4) \text{ mm}$

voy a **Set Colum Values** y escribo: **8.9/Col(D)**

Obs1: uso Col(D) porque allí están los intervalos de tiempo T_m .

Obs2: la velocidad está expresada en mm/s (en este ejemplo).

	A(X)	B(Y)	C(Y)	D(Y)	E(Y)	F(Y)
ne	tm	voltaje		Tm	velocidad	Error velocidad
its						
nts						
es						
1	0,3772	4,727334		0,05	178	9,424
2	0,4272	4,737379		0,0542	164,20664207	8,59193094
3	0,4814	4,744912		0,055	161,81818182	8,44958678
4	0,5364	4,729845		0,055	161,81818182	8,44958678
5	0,5914	4,734868		0,0558	159,49820789	8,31181511
6	0,6472	4,729845		0,0556	160,07194245	8,34584131
7	0,7028	4,737379		0,0556	160,07194245	8,34584131
8	0,7584	4,737379		0,0558	159,49820789	8,31181511
9	0,8142	4,729845		0,0566	157,24381625	8,17840153
10	0,8708	4,734868		0,0576	154,51388889	8,01745756
11	0,9284	4,734868		0,058	153,44827586	7,9548157
12	0,9864	4,727334		0,0586	151,87713311	7,86264255
13	1,045	4,734868		0,0602	147,84053156	7,62684739
14	1,1052	4,734868		--	--	--

Para la incerteza en la velocidad tengo que propagar errores:

$$v_i = \frac{L}{t_m(i+1) - t_m(i)}$$

$$\Delta v_i =$$

$$\sqrt{\left(\frac{\Delta L}{t_m(i+1) - t_m(i)}\right)^2 + \left(\frac{2L}{(t_m(i+1) - t_m(i))^2} \Delta t\right)^2}$$

Esto es lo mismo que

$$\Delta v = \sqrt{\left(\frac{\Delta L}{T_m}\right)^2 + \left(\frac{2L}{(T_m)^2} \Delta t\right)^2}$$

Como $L = L1 + L2$, $\Delta L = \Delta L1 + \Delta L2$

$$\Delta L = 0.4 \text{ mm}$$

$$\Delta t = 0.0002 \text{ s (ver ítem 1)}$$

Voy a **Set Colum Values** para poder calcular el error de la velocidad.

	A(X)	B(Y)	C(Y)	D(Y)	E(Y)	F(Y)	G(Y)
ne	tm	voltaje		Tm	velocidad	Error velocidad	tprom
its							
nts							
es							
1	0,3772	4,727334		0,05	178	9,424	0,4022
2	0,4272	4,737379		0,0542	164,20664207	8,59193094	0,4543
3	0,4814	4,744912		0,055	161,81818182	8,44958678	0,5089
4	0,5364	4,729845		0,055	161,81818182	8,44958678	0,5639
5	0,5914	4,734868		0,0558	159,49820789	8,31181511	0,6193
6	0,6472	4,729845		0,0556	160,07194245	8,34584131	0,675
7	0,7028	4,737379		0,0556	160,07194245	8,34584131	0,7306
8	0,7584	4,737379		0,0558	159,49820789	8,31181511	0,7863
9	0,8142	4,729845		0,0566	157,24381625	8,17840153	0,8425
10	0,8708	4,734868		0,0576	154,51388889	8,01745756	0,8996
11	0,9284	4,734868		0,058	153,44827586	7,9548157	0,9574
12	0,9864	4,727334		0,0586	151,87713311	7,86264255	1,0157
13	1,045	4,734868		0,0602	147,84053156	7,62684739	1,0751
14	1,1052	4,734868		--	--	--	--

¿Qué tiempo le asocio a cada velocidad?

Para responder esta pregunta tengo que ver que tiempos usé para calcular la velocidad.

En este caso, cada velocidad se obtuvo a partir de dos tiempos filtrados t_m consecutivos. Por ejemplo:

$v_1 = \frac{L}{t_m(2) - t_m(1)}$. Entonces sería razonable que el tiempo asociado a v_1 (lo llamo $t_{prom}(1)$) sea un valor

intermedio entre $t_m(1)$ y $t_m(2)$: $t_{prom}(1) = t_m(1) + \frac{T_m}{2} = \frac{t_m(1) + t_m(2)}{2}$

En forma general, el tiempo asociado a cada velocidad será t_{prom} que se obtiene a partir de los tiempos filtrados como sigue:

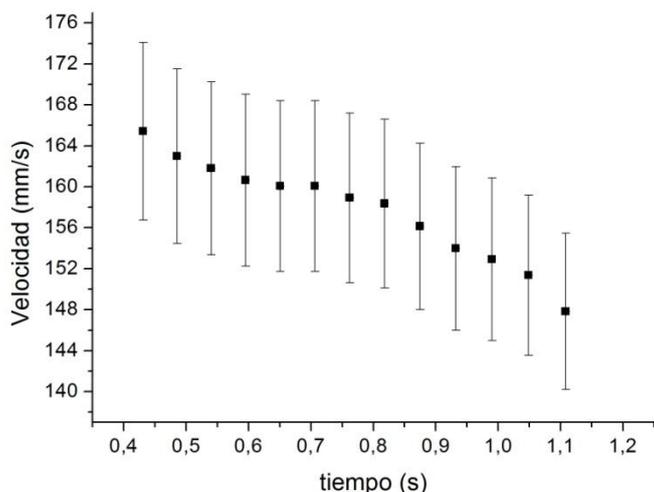
$$t_{prom}(i) = \frac{t_m(i) + t_m(i+1)}{2}$$

Uso **Set Colum Values** para calcular t_{prom} .

	A(X)	B(xEr±)	C(Y)	D(yEr±)
me	tprom	Error tprom	velocidad	Error velocidad
bits				
nts				
1	0,4022	0,0002	178	9,424
2	0,4543	0,0002	164,20664207	8,59193094
3	0,5089	0,0002	161,81818182	8,44958678
4	0,5639	0,0002	161,81818182	8,44958678
5	0,6193	0,0002	159,49820789	8,31181511
6	0,675	0,0002	160,07194245	8,34584131
7	0,7306	0,0002	160,07194245	8,34584131
8	0,7863	0,0002	159,49820789	8,31181511
9	0,8425	0,0002	157,24381625	8,17840153
10	0,8996	0,0002	154,51388889	8,01745756
11	0,9574	0,0002	153,44827586	7,9548157
12	1,0157	0,0002	151,87713311	7,86264255
13	1,0751	0,0002	147,84053156	7,62684739

Generamos un nuevo Workbook y copiamos los datos que necesitamos para graficar velocidad vs. tiempo.

Les queda de tarea ver la incerteza de t_{prom} .



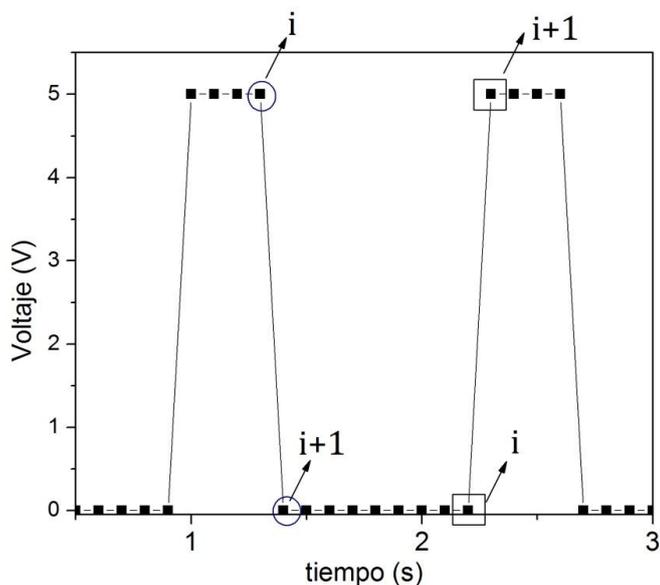
El gráfico tiene esta pinta. Puede variar un poco dependiendo del criterio que usen para determinar la velocidad. Pero en cualquier caso se observa que el móvil describe un movimiento uniformemente desacelerado (para este ejemplo).

Nota 1- Tiempo asociado a cada flanco de bajada:

1- Seleccionar la columna Tensión.

2- Ir a Worksheet > Extract Worksheet data (ó Worksheet Query) > Seleccionar las columnas que se quieren usar y escribir la condición. Si se quiere los flancos de bajada entonces la condición es

$$\text{Col(B)}[i] - \text{Col(B)}[i+1] > 4 \quad (\text{siempre y cuando la señal esté bien definida})$$



Si hago la operación

$$i - (i+1) > 4$$

La mayoría da cero (o cercano a este valor considerando los datos reales).

En los flancos de bajada (datos marcados con círculos)

$$i - (i+1) = 5$$

En los flancos de subida (datos marcados con rectángulos)

$$i - (i+1) = -5$$

El programa guarda los datos del elemento i que cumplen la condición.