Dinámica del cuerpo Rígido

5/3

Entrega de ejercicios: Cinemática : Ej 8
Dinámica : Ejs 1, 3, 4 } El 8/3 a las 14:00

Hay dos ecs para tener en cuenta:

- Variación del momento lineal.

$$\sum_i \vec{F}_i^{ext} = \dot{\vec{P}} = M \ddot{\vec{r}}_{CM}$$ — aceleración del centro de masas.

(dice cómo cambia $\vec{v}_{CM}$)

- Variación del momento angular.

$$\sum_i \vec{\tau}_{O_i}^{ext.} = \dot{\vec{L}}_O = I_O \vec{\gamma}$$ → $\vec{\gamma} = \dot{\vec{\Omega}}$ aceleración angular

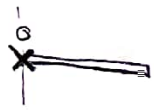
I_O: Momento de inercia.

(dice cómo cambia $\vec{\Omega}$)

→ Esto es cierto solo cuando el rígido rota alrededor de un eje de simetría:

$$\vec{L}_O = I_O \vec{\Omega} \quad , \quad I_O = \alpha M R^2 \text{ con } \alpha = \begin{cases} \frac{2}{5} & \text{esfera} \\ 1/2 & \text{cilindro} \\ 1 & \text{anillo.} \end{cases}$$

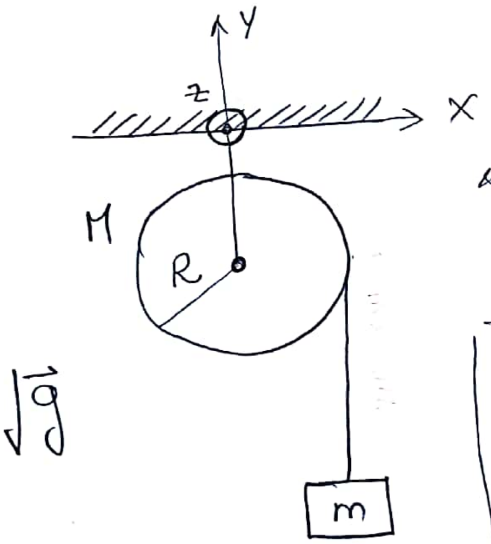
$$I_O = \alpha M L^2 \text{ con } \alpha = \begin{cases} 1/12 \\ 1/4 \end{cases}$$



Teorema de Steiner: Cuando un eje es paralelo a un eje de simetría O q' para x el CM: $\boxed{I_O = I_{CM} + M d^2}$

Importante: O debe ser un punto en reposo (respecto de un SRI) o el CM.

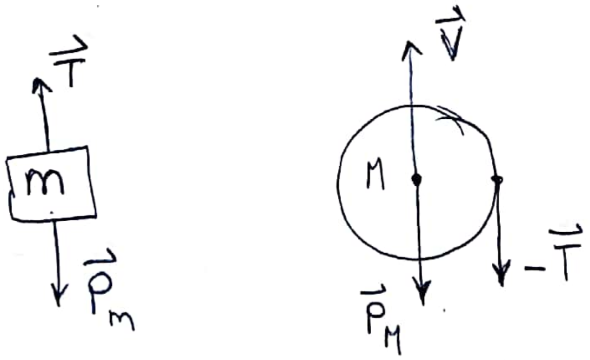
Ejemplo



La soga es inextensible y no hay rozamiento en el eje de la polea.

Hallar la aceleración angular de la polea, la aceleración de m y la tensión.

DCL



$\vec{T} = T\,\hat{y}$

$\vec{P}_m = -mg\,\hat{y}$

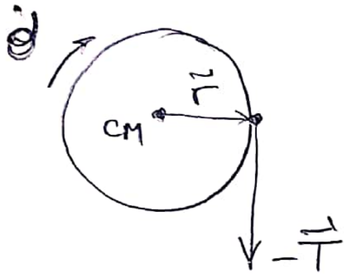
$\vec{P}_M = -Mg\,\hat{y}$

$\vec{V} = V\,\hat{y}$

Ec. mom. lineal (en $\hat{y}$): $\boxed{m\ddot{y}_m = T - mg}$ (A)

$M\ddot{y}_M = V - T - Mg \longrightarrow$ No me sirve.

Ec. mom. angular (para la polea respecto del CM)



$$\vec{\tau}_{CM} = \vec{r} \times (-\vec{T}) = R\hat{x} \times (-T\hat{y}) = -RT\hat{z}$$

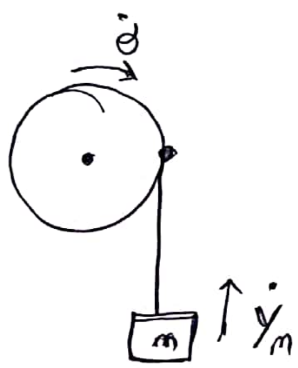
$$I_{CM}\cdot\vec{\gamma} = -\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta}\,\hat{z}$$

$$I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$$

$$\vec{\gamma} = -\ddot{\theta}\,\hat{z}$$

$$\Rightarrow \boxed{-RT = -\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta}} \quad (B)$$

Vínculo:



$$\dot{y}_m = -R\dot{\theta} \Rightarrow \boxed{\ddot{y}_m = -R\ddot{\theta}} \quad (C)$$

Quedan 3 ecs (A), (B), (C) y 3 incógnitas: $\ddot{y}_m$, $\ddot{\theta}$, T.

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{y}_m &= T - mg \\ T &= \frac{1}{2}MR\ddot{\theta} \\ \ddot{y}_m &= -R\ddot{\theta} \end{aligned}}$$

Resuelvo:

$$m\ddot{y}_m = \frac{1}{2}M\cancel{R}\left(-\frac{\ddot{y}_m}{\cancel{R}}\right) - mg.$$

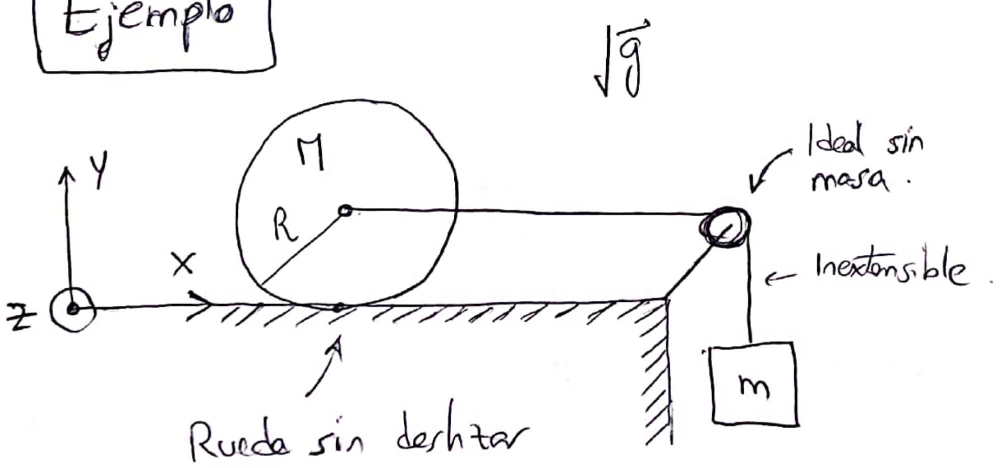
$$\Rightarrow \ddot{y}_m\left(1+\frac{M}{2m}\right) = -g \Rightarrow \boxed{\ddot{y}_m = -\frac{g}{\left(1+\frac{M}{2m}\right)}}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{g}{R\left(1+\frac{M}{2m}\right)}} \qquad \boxed{T = \frac{Mg}{2\left(1+\frac{M}{2m}\right)}}$$

Estudiar: $m \longrightarrow 0$, $M \rightarrow 0$, $M \rightarrow \infty$.

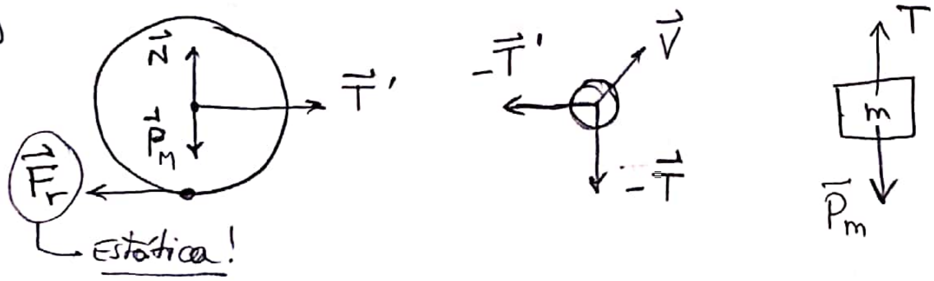
Signos ¡

Ejemplo



Calcular la aceleración del CM de la polea

DCL



$\vec{F}_r = -F_r\hat{x}$

$\vec{P}_M = -Mg\hat{y}$

$\vec{P}_m = -mg\hat{y}$

$\vec{T}' = T\hat{x}$

$\vec{T} = T\hat{y}$

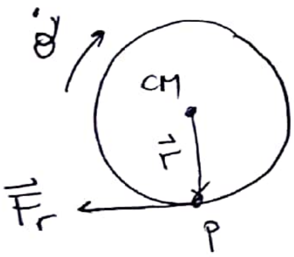
Ec. momento lineal:

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{y}_m &= T - mg \\ M\ddot{x}_M &= -F_r + T \end{aligned}}$$

(para m en y)

(para M en x)

Ec momento angular (desde CM):



$$\vec\tau_{CM} = \vec r \times \vec F_r = -R\hat y \times (-F_r\hat x) = -RF_r\hat z$$

$$I_0 \cdot \vec\gamma = -\frac{1}{2}MR^2\ddot\theta\,\hat z$$

$$I_0 = \frac{1}{2}MR^2$$

$$\vec\gamma = -\ddot\theta\,\hat z \qquad (\vec\Omega = -\dot\theta\,\hat z)$$

$$\Rightarrow \boxed{-RF_r = -\frac{1}{2}MR^2\ddot\theta}$$

Vínculos:

$\dot x_M = -\dot y_m$ (soga inextensible).

$\dot x_M = R\dot\theta$ (rodadura)

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec v_P = \vec v_{CM} + \vec\Omega \times (\vec r_P - \vec r_{CM}) \\ &\vec v_P = 0 \quad \text{(rodadura)} \\ &\vec v_{CM} = \dot x_M\,\hat x \\ &\vec\Omega = -\dot\theta\,\hat z \\ &\vec r_P - \vec r_{CM} = -R\hat y \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot x_M = -\ddot y_m}, \quad \boxed{\ddot x_M = R\ddot\theta}$$

$\Rightarrow$ 5 ecs ⊕ 5 incógnitas: $\ddot y_m, \ddot x_M, \ddot\theta, T, F_r$

$$M\ddot{x}_M = \underbrace{-\frac{1}{2}MR\Big(\overbrace{\frac{1}{R}\ddot{x}_M}^{\ddot{\theta}}\Big)}_{-F_R} + \underbrace{m(-\ddot{x}_M)+mg}_{T}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}M\ddot{x}_M + m\ddot{x}_M = mg \Rightarrow \boxed{\ddot{x}_M = \left(\frac{m}{m+\frac{3}{2}M}\right)g < g}$$

<u>Límites</u>: $M \longrightarrow \infty$, $M \longrightarrow 0$, $m \longrightarrow 0$

Ejercicio: resolver ahora el ejercicio 2