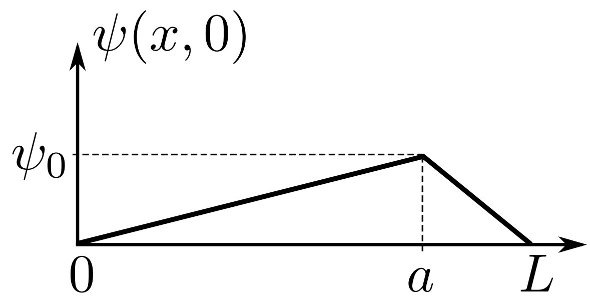
**Problema 2**

Considere una cuerda de longitud $L$, de densidad de masa uniforme $\mu_0$ sometida a una tensión $T_0$, con ambos extremos fijos. Se le da a la cuerda la forma mostrada en la figura, y a $t = 0$ se la suelta desde el reposo.




a) Usando el sistema de coordenadas indicado en la figura, halle $\psi(x,t)$ en función del parámetro $a$.

b) Hallar un valor de $a$ para que los modos pares no sean excitados.

**Fórmulas útiles**

$\int x\sin(\alpha x) = \frac{\sin(\alpha x) - \alpha x\cos(\alpha x)}{\alpha^2}$

**Resolución:**

a) Propongo como solución general $\psi(x,t) = [A\sin(kx) + B\cos(kx)]\cos(\omega t + \phi)$. Primero reemplazo las condiciones de borde y después las iniciales.

Condiciones de Borde. Cuerda con ambos extremos fijos: $\psi(0,t) = 0 = \psi(L,t)$.
Evaluamos la condición primero en $x = 0$

$$\psi(0,t) = 0 = B\cos(\omega t + \phi) \Rightarrow \boxed{\text{B=0}}. \tag{1}$$

Con este resultado, reemplazamos en la segunda condición de borde:

$$\begin{aligned} \psi(L,t) = 0 = A\sin(kL)\cos(\omega t + \phi) &\Rightarrow \sin(kL) = 0 \\ &\Rightarrow kL = p\pi \\ &\Rightarrow \boxed{\mathrm{k}_p = \tfrac{p\pi}{L}}. \end{aligned} \tag{2}$$

Luego, obtenemos la siguiente expresión para la función de onda, con $\omega_p = k_p$:

$$\psi(x,t) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p \sin(k_p x)\cos(\omega_p t + \phi_p). \tag{3}$$

Condiciones de Iniciales:

Primero evaluamos la condición inicial para la velocidad:

$$\dot{\psi}(x,0) = 0 = \sum(-\omega_p)A_p \sin(k_p x)\sin(\phi_p) \Rightarrow \sin(\phi_p) = 0 \Rightarrow \boxed{\phi_p = 0}. \tag{4}$$

La función de onda queda expresada como:

$$\psi(x,t) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p \sin(k_p x)\cos(\omega_p t). \tag{5}$$

Solo nos queda determinar el valor de los $A_p$, que salen de evaluar la otra condición inicial, dada por la forma mostrada en la figura. Esta forma se puede escribir de la siguiente manera:

$$\psi(x,0) = \begin{cases} \frac{\psi_0 x}{a} & si \quad 0 \leq x \leq a \\ \\ \frac{\psi_0(L-x)}{(L-a)} & si \quad a \leq x \leq L \end{cases} \tag{6}$$

Los coeficientes $A_p$ se calculan por Fourier:

$$\begin{aligned} A_p &= \frac{2}{L}\int_0^L \psi(x,0)\sin(k_p x)dx = \frac{2\psi_0}{L}\left[\frac{1}{a}\int_0^a x\sin(k_p x)dx + \frac{1}{(L-a)}\int_a^L (L-x)\sin(k_p x)dx\right] \\ &= \frac{2\psi_0}{L}\left[\left(\frac{\sin(k_p x) - k_p x\cos(k_p x)}{a k_p^2}\right)\Bigg|_0^a - \left(\frac{L\cos(k_p x)}{(L-a)k_p}\right)\Bigg|_a^L - \left(\frac{\sin(k_p x) - k_p x\cos(k_p x)}{(L-a)k_p^2}\right)\Bigg|_a^L\right] \end{aligned}$$

Reemplazando y haciendo un poco de manejo obtenemos:

$$A_p = \frac{2\psi_0}{(L-a)k_p^2}\sin(k_p a). \tag{7}$$

Luego,

$$\psi(x,t) = \sum_{p=1}^{\infty}\left[\frac{2\psi_0}{(L-a)k_p^2}\sin(k_p a)\right]\sin(k_p x)\cos(\omega_p t). \tag{8}$$

b) Para anular los modos pares, es decir, aquellos modos con $p = 2n$, tengo que pedir que $A_{2n} = 0 \; \forall n$. Esto equivale a pedir que:

$$\sin(k_{2n} a) = \sin(\frac{2n\pi}{L}a) = 0 \Rightarrow \frac{2n\pi a}{L} = m\pi \Rightarrow a = \beta\frac{L}{2} \tag{9}$$

con $\beta = m/n$. Tomando $\beta = 1$, obtenemos que la condición se cumple para $a = \frac{L}{2}$.