Apéndice A

Medición de diferencias de fase

Dadas dos señales armónicas dependientes del tiempo

$$V_1 = V_{10} \cos \omega t \tag{A.1}$$

$$V_2 = V_{20} \cos(\omega t + \phi) \tag{A.2}$$

cuyos respectivos gráficos se ilustran en la figura A.1, buscamos un modo simple de obtener la diferencia de fase, ϕ, empleando un osciloscopio. Estudiaremos los dos métodos que se detallan a continuación.

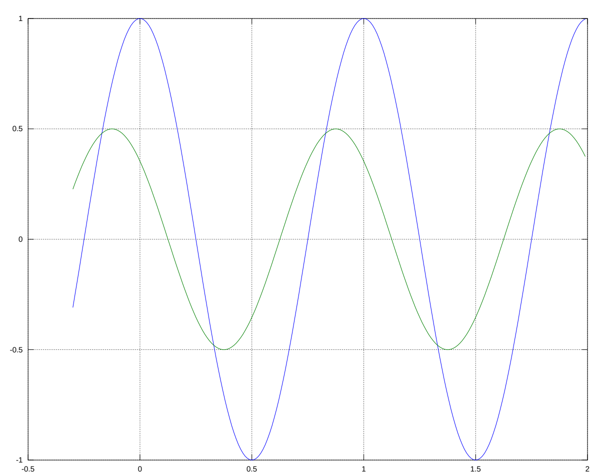

Figura A.1: *Dos señales armónicas defasadas, de igual frecuencia y diferente amplitud.*

A.1. Mediante figuras de Lissajous

Podemos considerar a las expresiones (A.1) y (A.2) como la representación paramétrica de una curva en el plano XY, asociando V_1 y V_2 con las componentes x e y de dicha representación, de modo tal que se tiene

$$V_x = V_{x0}\cos\omega t \tag{A.3}$$
$$V_y = V_{y0}\cos(\omega t+\phi) \tag{A.4}$$

cuyo gráfico se ilustra en la figura A.1,

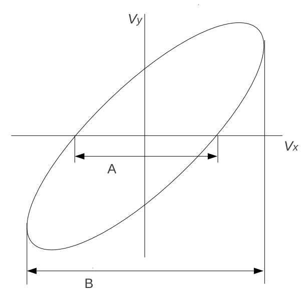

Figura A.2: *Figura de Lissajous para el caso de frecuencias iguales.*

Para los instantes t tales que $\omega t = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ resulta

$$V_x = \pm V_{x0} = \pm\frac{B}{2} \tag{A.5}$$

Para t tal que $\omega t+\phi = \pi/2 + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$V_x = \pm V_{x0}\cos(\pi/2-\phi) = \pm V_{x0}\sin\phi = \pm\frac{A}{2} \tag{A.6}$$

Por tanto,

$$\sin\phi = \pm\frac{A}{B} \tag{A.7}$$

Puede demostrarse que también vale

$$\sin\phi = \pm\frac{C}{D} \tag{A.8}$$

donde C y D son los análogos a A y B, respectivamente, medidos sobre el eje V_y. De las ecuaciones anteriores resulta

$$\boxed{|\phi| = \arcsin\frac{A}{B} = \arcsin\frac{C}{D}} \tag{A.9}$$

A.2. Midiendo retrasos temporales

Sea t_1 un instante tal que $V_2 = 0$, esto es: $\cos(\omega t_1 + \phi) = 0$, lo que a su vez implica

$$\omega t_1 + \phi = \pi/2 + k_0\pi \quad \text{con} \quad k_0 \in \mathbb{Z}. \tag{A.10}$$

Sea ahora Δt el lapso más breve que debe aguardarse para que V_1 sea nula, esto es: $\cos\omega(t_1 + \Delta t) = 0$, lo que implica

$$\omega(t_1 + \Delta t) = \pi/2 + k_0\pi. \tag{A.11}$$

De las condiciones (A.10) y (A.11) resulta

$$\boxed{\phi = \omega\,\Delta t} \tag{A.12}$$

A.3. Convención importante

Dadas las expresiones (A.1) y (A.2), se dice que la señal V_2 *adelanta* en ϕ a V_1.

Observación: Note que V_2 alcanza sus máximos, mínimos y ceros con igual pendiente, *antes* que V_1. Es por eso que se dice que V_2 *adelanta* a V_1.

A.4. Parte computacional

Ejecute el programa del cuadro A.1 en Matlab u Octave y ejercite lo siguiente

1. Mida el defasaje ϕ siguiendo los métodos estudiados en esta sección.
2. Varíe el defasaje ϕ tanto en magnitud como en signo y observe los cambios en las figuras. Asegúrese de explorar el rango $0 \leq |\phi| \leq 2\pi$.
3. Verifique si sus conclusiones se modifican al cambiar cos por sin.
4. Pruebe variar la frecuencia relativa.

Ejemplo: Diferencias de fase

```
% Definimos el vector t, y calculamos Vx y Vy
t = [0:0.01:2];
Vx = cos(2*pi*t);
Vy = cos(2*pi*t + pi/6);

% Graficamos Vx y Vy en funcion del tiempo
figure(1)
plot(t,Vx,t,Vy)
grid on

% Graficamos la figura de Lissajous
figure(2)
plot(Vx,Vy)
grid on
```

Cuadro A.1: *El programa evalúa dos señales temporales armónicas defasadas y las grafica en función del tiempo e ilustra la correspondiente figura de Lissajous.*

A.5. Preguntas

1. Debe estar centrada la elipse de la figura A.2 para medir A y B?
   Debe estar centrada para medir A o para medir B?
2. Deben estar centradas V_1 y V_2 para medir Δt?
3. Cuáles son las ventajas relativas de cada uno de los dos métodos estudiados para medir ϕ?
4. Cuál de los dos métodos permite determinar ϕ con menor incerteza?

A.6. Problemas propuestos

1. Demuestre la validez de la expresión (A.8).
2. *a*) Demuestre que si $\phi > 0$, el punto (V_x, V_y) definido por las expresiones (A.3) y (A.4) recorre la elipse ilustrada en la figura A.1 en sentido horario.

b) Cómo podría verificar esto en un osciloscopio?

3. La deducción de la expresión A.12 ($\phi = \omega \Delta t$) se realizó considerando el retraso entre dos ceros respectivamente consecutivos de ambas señales. Pudo haberse llegado a la misma conclusión estudiando el retraso entre dos máximos, mínimos, o cualquier otro punto. Qué considera más ventajoso desde el punto de vista experimental, medir el retraso entre dos ceros, o entre dos máximos?

v. Ago 2011